

GEAMALGAMEERDE PRODUCTEN EN HNN-EXTENSIES

Milan Morreel

Studentennummer: 02011024

Promotor: Prof. dr. Tom De Medts
Vakgroep Wiskunde, Informatica en Statistiek

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van master of science in de wiskunde

Academiejaar: 2024 – 2025

Voorwoord

Om te beginnen bedank ik professor Tom De Medts voor de begeleiding bij het schrijven van deze masterproef. Zijn bijsturingen waren soms noodzakelijk, maar tegelijk was de vrijheid die ik kreeg bij het kiezen van dit onderwerp een grote meerwaarde. Veel dank gaat ook uit naar mijn familie voor de steun tijdens mijn laatste studiejaar, en naar mijn grootvader voor zijn interesse in mijn werk.

In het begin van het eerste semester was het de bedoeling om de eigenschappen van Higman-Neumann-Neumann-extensies (HNN-extensies) te bestuderen. Op dat moment zag ik echter de fundamentele aard van de theorie nog niet in. Zoekt men op het internet naar toepassingen van HNN-extensies, dan komt men uit op talloze hedendaagse artikels. Dit is een duidelijk teken dat deze constructie nog steeds een grote rol speelt in de literatuur. Veel van deze artikels zijn echter zeer gespecialiseerd en hebben weinig met elkaar te maken. Om die reden overwoog ik een ander pad op te gaan. Na het lezen van verschillende boeken en artikels in andere takken van de algebra kwam ik, kort voor het tweede semester, opnieuw bij het begin terecht: geamalgameerde producten en HNN-extensies. Tijdens die zoektocht ontdekte ik de bredere theorieën en toepassingen waarmee deze structuren verbonden zijn.

De auteur geeft de toelating deze masterproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de masterproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze masterproef.

Milan Morreel
31 mei 2025

Samenvatting

Er bestaat geen enkel boek dat volledig gewijd is aan geamalgameerde producten en HNN-extensies. Toch valt er veel over te zeggen. De relevante resultaten zijn verspreid terug te vinden in de literatuur, gaande van het artikel van Stallings in 1971 tot het werk van Serre in 1980. Het doel van deze tekst is om deze restanten samen te brengen en te verwerken tot één geheel. Dit is in grote mate gelukt, al is dit werk niet volledig op zichzelf staand: af en toe bleek het nodig om te steunen op bestaande resultaten uit de literatuur.

Hoewel deze tekst gebaseerd is op bestaande literatuur, wijken de gebruikte definities en de manier waarop we bepaalde zaken behandelen vaak af van wat men in de klassieke referenties terugvindt. Zo kiezen we er bijvoorbeeld voor om elke optredende structuur te definiëren via een presentatie. Deze aanpak zorgt ervoor dat men een goed inzicht krijgt in het achterliggende idee van deze structuren.

Vele eigenschappen die zouden moeten gelden worden hier expliciet uitgewerkt. De theorie gaat vaak gepaard met identificaties die in de literatuur doorgaans niet besproken worden. In dit werk vermijden we zulke identificaties waar verwarring mogelijk is, en kiezen we er in plaats daarvan voor om te werken met commutatieve diagrammen om het argument elegant te houden. Daarnaast worden verschillende beweringen in artikels, die niet altijd vanzelfsprekend zijn, verder uitgewerkt. Elke stelling die afkomstig is van de literatuur is voorzien van een referentie. In de meeste gevallen zijn de bewijzen echter verder uitgewerkt of licht aangepast.

In het eerste hoofdstuk bewijzen we de belangrijkste structurele eigenschappen van geamalgameerde producten en HNN-extensies. In het tweede en derde hoofdstuk bespreken we het verband tussen geamalgameerde producten en HNN-extensies enerzijds, en groepsacties op bomen en uiteinden van groepen anderzijds.

Geamalgameerde producten en HNN-extensies hebben tal van toepassingen in zowel de algebraïsche topologie als de combinatorische groepentheorie. In het bijzonder spelen HNN-extensies een fundamentele rol in de oplossing van het befaamde woordprobleem.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	5
2	Fundamentele eigenschappen	7
2.1	Geamalgameerde producten	7
2.2	HNN-extensies	15
3	Bass-Serre-theorie	22
3.1	Inleidende definities	22
3.2	Boomproducten	25
3.3	Fundamentele groepen	29
3.4	Acties op bomen	34
3.4.1	Constructie van de actie van de fundamentele groep	36
3.4.2	Karakterisatie van groepsacties zonder inversie op bomen	41
3.5	Applicaties	44
4	Stallings-theorie	46
4.1	Bipolaire structuren	46
4.2	Uiteinden van groepen	56
4.3	Applicaties	68
5	Algemeen besluit	72

Hoofdstuk I

Inleiding

Een groot deel van de theorie rond geamalgameerde producten en HNN-extensies werd ontwikkeld in de jaren 1960 tot 1970. Deze thesis situeert zich in dit tijdperk.

Om het onderwerp te motiveren bespreken we eerst drie toepassingen. Uiteraard bestaan er nog veel meer toepassingen dan degene die we hier beschouwen. Het eerste en meest gekende betreft de oplossing van het woordprobleem. Dit probleem stelt zich de volgende vraag: gegeven een groep G met als presentatie $\langle S \mid R \rangle$, en een element $g \in G$ dat wordt uitgedrukt als een woord in de symbolen van $S \cup S^{-1}$. Bestaat er een algoritme dat bepaalt of $g = 1$ in G ? Om het concept van een ‘algoritme’ wiskundig te definiëren moet men teruggaan naar het begrip van een recursieve functie, wat behandeld wordt in de wiskundige logica. Met behulp van HNN-extensies kan men aantonen dat voor bepaalde groepen G zo’n algoritme niet bestaat. Men zegt in dit geval dat het woordprobleem in G onbeslisbaar is. Een uitstekende referentie dat de oplossing van het woordprobleem bespreekt is [21].

Naast het woordprobleem bestaan er nog andere beslissingsproblemen zoals het toevoegingsprobleem (zijn twee gegeven elementen toegevoegd?) en het isomorfismeprobleem (zijn twee groepen met gegeven presentaties isomorf?). Doorheen de jaren werden steeds specifiekere varianten van beslissingsproblemen onderzocht (zie [14, Hoofdstuk 4]), en vaak worden HNN-extensies gebruikt in de oplossing van deze problemen.

Een tweede belangrijke toepassing vindt men in de algebraïsche topologie. Zij X een topologische ruimte die bedekt wordt door twee pad-samenhangende open deelruimten U en V . Dan zegt de Seifert-Van Kampen-stelling ons dat de fundamentele groep van X gelijk is aan het geamalgameerd product van deze van U en V , waarbij de fundamentele groep van $U \cap V$ geamalgameerd wordt. Dit resultaat wordt in [8, Sectie 1.2] gebruikt om de fundamentele groep van verschillende topologische ruimten te berekenen. Men kan bijvoorbeeld aantonen dat de fundamentele groep van de roos R_n (de graaf die bestaat uit één top verbonden door n zelflussen) gegeven wordt door de vrije groep F_n .

De Seifert-Van Kampen-stelling heeft ook een minder bekend analogon voor HNN-extensies: zij X een topologische ruimte, en $f : X \rightarrow X$ een continue functie. Beschouw dan de quotiëntruimte

$$Y := (X \times [0, 1]) / \sim$$

met $(x, 0) \sim (f(x), 1)$ voor elke $x \in X$. Eens we de fundamentele groep van X kennen, dan wordt de fundamentele groep van Y gegeven door een HNN-extensie van deze groep. Als X bijvoorbeeld een punt is en $f = \text{id}_X$, dan is Y homeomorf met een cirkel en vinden we dat de fundamentele groep van de cirkel gegeven wordt door $\mathbb{Z}$. Kiezen we X als de cirkel, dan is Y een torus en bekomen we $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ voor de fundamentele groep van Y .

Een derde toepassing die geleid heeft tot de keuze van dit onderwerp vinden we in de theorie van Outer space, wat men kan zien als het analogon van Teichmüller-theorie voor vrije groepen. Hoewel we in het vervolg Outer space niet zullen behandelen, bespreken we kort de connectie. Voor een uitgebreidere introductie verwijzen we de geïnteresseerde lezer naar [23], [24] en [4]. Voor een vaste $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ is Outer space een topologische ruimte

die men noteert als CV_n . Deze ruimte bestaat uit tupels (G, g, l) , waarbij G een graaf is, g een homotopie-equivalentie van G naar de roos R_n , en l een gewichtsfunctie op de bogenverzameling van G . De uitwendige automorfismengroep $\text{Out}(F_n)$ van de vrije groep F_n werkt op deze ruimte CV_n , en via deze actie probeert men eigenschappen van $\text{Out}(F_n)$ te achterhalen. Een belangrijk resultaat in dit gebied is de Nielsen realisatiestelling, die zegt dat elke eindige deelgroep van $\text{Out}(F_n)$ een punt van CV_n fixeert. Een bewijs van deze stelling wordt gegeven in het artikel [26], en maakt gebruik van het eindresultaat van deze thesis (stelling 4.3.1). Als toepassing van de Nielsen realisatiestelling wordt in [25] bewezen dat de maximale orde van een eindige deelgroep van $\text{Out}(F_n)$ gelijk is aan $2^n n!$ voor $n > 2$, en 12 voor $n = 2$.

De structuur van deze thesis is als volgt. In hoofdstuk 2 definiëren we het geamalgameerd product en de HNN-extensie door middel van een presentatie. Ons eerste doel is om aan te tonen dat deze structuren in zekere zin goed gedefinieerd zijn. Daarna tonen we het bestaan aan van een normaalvorm in beide structuren, wat ons een manier geeft om elk element op unieke wijze te schrijven. Een eenvoudig voorbeeld is het vrij product $G * H$ van twee groepen G en H : elk element is een alternerend product van factoren in G en H . Met deze normaalvormen leiden we belangrijke structurele eigenschappen af van geamalgameerde producten en HNN-extensies.

Hoofdstuk 3 is grotendeels gebaseerd op [20]. We definiëren eerst het begrip van een boomproduct, en tonen aan dat men een boomproduct kan zien als een geïtereerde versie van een geamalgameerd product. Daarna definiëren we het algemenere concept van een fundamentele groep, en we bewijzen dat dit kan gezien worden als een geïtereerde HNN-extensie van een boomproduct. Vervolgens tonen we de centrale resultaten van dit hoofdstuk aan, namelijk stellingen 3.4.1 en 3.4.2. Deze stellingen geven een equivalentie tussen fundamentele groepen en groepsacties op bomen. Tenslotte geven we een aantal applicaties van deze resultaten.

Hoofdstuk 4 is gebaseerd op [22]. Hoewel dit artikel historisch gezien eerder verscheen dan het werk waarop hoofdstuk 3 is gebaseerd, past het inhoudelijk beter op deze plaats. We introduceren het begrip bipolaire structuur, en tonen in stelling 4.1.9 aan dat er een bijectief verband bestaat tussen bipolaire structuren enerzijds, en niet-triviale geamalgameerde producten en HNN-extensies anderzijds. Daarna definiëren we uiteinden van groepen. We tonen aan dat het aantal uiteinden van een (eindig voortgebrachte) groep goed gedefinieerd is en slechts waarden kan aannemen in $\{0, 1, 2, \infty\}$. In stelling 4.2.23 geven we een karakterisatie van groepen met twee uiteinden in termen van geamalgameerde producten en HNN-extensies. In stelling 4.2.25 geven we zonder bewijs ook een karakterisatie van groepen met oneindig veel uiteinden. Aan het einde van hoofdstuk 4 geven we een mooie toepassing van alles wat we gezien hebben in deze thesis, namelijk stelling 4.3.1.

Tenslotte herhalen we in hoofdstuk 5 de belangrijkste resultaten die in deze masterproef zijn bewezen. Daarbij bespreken we meteen ook de beperkingen van deze resultaten, samen met andere interessante vragen die buiten beschouwing zijn gebleven. We geven bovendien enkele ideeën mee om deze beperkingen en verdere vragen aan te pakken, wat eventueel kan dienen als vertrekpunt voor verder onderzoek.

Hoofdstuk II

Fundamentele eigenschappen

2.1 Geamalgameerde producten

Definitie 2.1.1. Zij G, H twee groepen met presentatie

$$G = \langle S_G \mid R_G \rangle \quad H = \langle S_H \mid R_H \rangle$$

waarbij $S_G = \{g_i \mid i \in I\}$ en $S_H = \{h_j \mid j \in J\}$ disjunct zijn. Zij $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme tussen twee deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$. Elke $a \in A$ en $b \in B$ kunnen we schrijven in functie van de generatoren van G en H : $a \equiv a(g_i)$ en $b \equiv b(h_j)$. We definiëren het geamalgameerd product van G en H met betrekking tot ϕ als

$$G *_\phi H := \langle S_G, S_H \mid R_G, R_H, R_\phi \rangle$$

waarbij $R_\phi = \{a(g_i) = \phi(a)(h_j) \mid a \in A\}$.

Opmerking 2.1.2.

1. Het geamalgameerd product wordt in de literatuur vaak kortweg genoteerd als

$$G *_\phi H = \langle S_G, S_H \mid R_G, R_H, A = B \rangle$$

In het geval de identificatie $\phi : A \rightarrow B$ duidelijk is uit de context noteert men ook $G *_A H$ in plaats van $G *_\phi H$. We zullen deze notatie echter vermijden.

2. In de definitie van het geamalgameerd product gebruiken we het keuzeaxioma om voor elke $a \in A$ een ontbinding te vinden in termen van de generatoren van G , en analoog voor $b \in B$. We kunnen in R_ϕ de relaties $\{a(g_i) = \phi(a)(h_j) \mid a \in A\}$ ook beperken tot relaties die enkel de generatoren van A bevatten. Dit zal geen rol spelen later. Bijgevolg kan het keuzeaxioma ontweken worden als A eindig voortgebracht is (en dus ook B). Merk op dat als bovendien G en H eindig gerepresenteerd zijn, dan geldt dit ook voor $G *_\phi H$. We zullen aantonen dat we ook R_ϕ kunnen uitbreiden zodanig dat het de relaties $\{a(g_i) = \phi(a)(h_j) \mid a \in A\}$ bevat voor elke mogelijke ontbinding van $a \in A$ en $\phi(a) \in B$. We hebben het keuzeaxioma dus ook in het algemeen niet nodig.
3. Kiezen we $A = \{1\}$, $B = \{1\}$ en $\phi : A \rightarrow B$ triviaal, dan volgt uit het vorige punt dat we $R_\phi = \{1 = 1\}$ kunnen kiezen. Op die manier bekomen we de definitie van het vrij product $G * H$.

Het idee van het geamalgameerd product is dat we een groep construeren die zowel G als H bevat, waarin de deelgroepen A en B geïdentificeerd worden door middel van het isomorfisme $\phi : A \rightarrow B$. Op dit moment is het nog niet duidelijk dat dit werkelijk zo is. Het zou bijvoorbeeld kunnen dat sommige elementen van G of H geïdentificeerd worden met elkaar, zodat de groepen G en H binnen de grotere groep $G *_\phi H$ als het

ware ‘afbreken’. Het zou ook kunnen dat door de interactie van de verschillende relaties in $G *_\phi H$ de doorsnede van G en H binnen $G *_\phi H$ groter is dan wat we zouden verwachten. Dat deze fenomenen zich niet voordoen zal volgen eens we een normaalvorm voor het geamalgameerd product hebben aangetoond (zie stelling 2.1.7 verderop). De groepen G en H worden de factoren van het geamalgameerd product genoemd, en A en B zijn de geamalgameerde deelgroepen.

Ons volgende doel is om aan te tonen dat het geamalgameerd product goed gedefinieerd is in de zin dat als men andere presentaties voor G en H zou nemen, het resulterend geamalgameerd product isomorf is met het origineel. Voorlopig werken we steeds met vaste presentaties van de groepen G en H . Het volgende lemma vormt een veralgemening van de universele eigenschap van vrije groepen en is overgenomen uit [10, Hoofdstuk 4]. We zullen dit lemma regelmatig nodig hebben doorheen deze tekst.

Lemma 2.1.3 (Substitutietest). *Zij $G = \langle S \mid R \rangle$ en H gegeven groepen, en $\theta : S \rightarrow H$. Dan bestaat een unieke uitbreiding van θ tot een groeps morfisme $\theta'' : G \rightarrow H$ als en slechts als voor elke $r \in R$ geldt dat $r[\theta(s)/s]$ de identiteit is in H . Hierbij is $r[\theta(s)/s]$ het woord dat bekomen wordt door elke letter s in r te vervangen door $\theta(s)$.*

Bewijs. Er geldt dat $G = F/\langle\langle R \rangle\rangle$, met F de vrije groep voortgebracht door S en $\langle\langle R \rangle\rangle$ de normaaldeeler van F voortgebracht door R . Uit de universele eigenschap breidt θ op unieke wijze uit tot een morfisme $\theta' : F \rightarrow H$. Uit de constructie van θ' volgt dat de eigenschap $r[\theta(s)/s] = 1$ in H voor elke $r \in R$ kan vertaald worden als $R \subseteq \ker(\theta')$. Dit impliceert dan dat $\ker(\pi) = \langle\langle R \rangle\rangle \subseteq \ker(\theta')$, waarbij $\pi : F \rightarrow G$ de canonieke surjectie is. Definieer nu $\theta'' : G \rightarrow H$ als volgt. Als $g \in G$, neem dan $f \in F$ willekeurig met $\pi(f) = g$, en stel $\theta''(g) = \theta'(f)$. Een eenvoudig argument bewijst dat θ'' een goed gedefinieerd morfisme is dat θ uitbreidt, wat betekent dat het volgende diagram commuteert.

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & G \\ & \searrow \theta & \downarrow \theta' & \swarrow \theta'' & \\ & & H & & \end{array}$$

Hierbij is $\iota : S \rightarrow F$ de natuurlijke inbedding. De uniciteit van θ'' is duidelijk, aangezien G voortgebracht wordt door S . Omgekeerd, als er een uitbreiding θ'' van θ bestaat dan geldt $R \subseteq \ker(\pi) \subseteq \ker(\theta'' \circ \pi) = \ker(\theta')$. $\square$

Uit het voorgaande lemma volgt dat er voor de hand liggende morfismen $G \rightarrow G *_\phi H$ en $H \rightarrow G *_\phi H$ bestaan door corresponderende generatoren op elkaar af te beelden. Dergelijke morfismen noemen we voortaan canonische morfismen. Als $g \in G$ dan noteren we met g' het beeld van g in $G *_\phi H$, en analoog voor $h \in H$. We noteren met G' en H' de beelden van respectievelijk G en H in $G *_\phi H$. De volgende twee resultaten zijn eigen bijdragen. Het bewijs van stelling 2.1.5 is gebaseerd op [14, Hoofdstuk 4, Lemma 1.1], dat het vrij product van twee groepen behandelt.

Lemma 2.1.4. *Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij $\psi : G \rightarrow K$ en $\chi : H \rightarrow K$ morfismen zodat $\psi(a) = (\chi \circ \phi)(a)$ voor elke $a \in A$. Dan bestaat een uniek morfisme $\psi * \chi : G *_\phi H \rightarrow K$ met de eigenschap dat $(\psi * \chi)(g') = \psi(g)$ en $(\psi * \chi)(h') = \chi(h)$ voor elke $g \in G$ en $h \in H$.*

Bewijs. Het morfisme $\psi * \chi$ moet een uitbreiding zijn van $\theta : S_G \cup S_H \rightarrow K$ gedefinieerd door $\theta(g_i) = \psi(g_i)$ en $\theta(h_j) = \chi(h_j)$. Uit het feit dat ψ en χ morfismen zijn volgt

dat voor $r \in R_G \cup R_H$ geldt dat $r[\theta(s)/s]$ de identiteit is in K . Beschouw nu een relatie van de vorm $r \equiv a(g_i)(\phi(a)^{-1}(h_j)) \in R_\phi$, waarbij $\phi(a)^{-1}(h_j)$ het woord $\phi(a)(h_j)$ in omgekeerde volgorde voorstelt, met elke generator h_j vervangen door h_j^{-1} . Dan is $r[\theta(s)/s] \equiv a[\psi(g_i)/g_i]\phi(a)^{-1}[\chi(h_j)/h_j]$. Aangezien ψ en χ morfismen zijn, volgt dat in K geldt $r[\theta(s)/s] = \psi(a)((\chi \circ \phi)(a))^{-1}$. Omdat $\psi(a) = (\chi \circ \phi)(a)$, is $r[\theta(s)/s] = 1$. Het gestelde volgt nu uit de substitutietest. $\square$

Stelling 2.1.5. *Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij $G \cong \overline{G}, H \cong \overline{H}$, en zij $\overline{\phi} : \overline{A} \rightarrow \overline{B}$ het isomorfisme dat verkregen wordt uit het diagram*

$$\begin{array}{ccccccc} G & \longleftarrow & A & \xrightarrow{\phi} & B & \longrightarrow & H \\ \downarrow \psi & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \chi \\ \overline{G} & \longleftarrow & \overline{A} & \xrightarrow{\overline{\phi}} & \overline{B} & \longrightarrow & \overline{H} \end{array}$$

*Dan is $G *_\phi H \cong \overline{G} *_\phi \overline{H}$, ongeacht de gekozen presentaties, en ongeacht de ontbindingen van de elementen van de geamalgameerde deelgroepen.*

Bewijs. Onderstel dat $G *_\phi H$ en $\overline{G} *_\phi \overline{H}$ gedefinieerd zijn met betrekking tot zekere vaste presentaties van $G, H, \overline{G}$ en $\overline{H}$, en zekere vaste ontbindingen van de elementen van $A, B, \overline{A}$ en $\overline{B}$. Zij $\psi : G \rightarrow \overline{G}$ en $\chi : H \rightarrow \overline{H}$ isomorfismen. Dan kunnen we deze uitbreiden tot morfismen (die we met ψ en χ blijven noteren)

$$\psi : G \rightarrow \overline{G} \rightarrow \overline{G} *_\phi \overline{H} : g \mapsto \psi(g)' \quad \chi : H \rightarrow \overline{H} \rightarrow \overline{G} *_\phi \overline{H} : h \mapsto \chi(h)'$$

Door de relaties in R_ϕ en uit het feit dat $g \mapsto g'$ en $h \mapsto h'$ morfismen zijn, geldt in $\overline{G} *_\phi \overline{H}$ dat $\overline{a}' = \overline{\phi}(\overline{a})'$ voor elke $\overline{a} \in \overline{A}$. Hieruit en uit het diagram in de opgave volgt dat de voorwaarden van lemma 2.1.4 voldaan zijn. Dus $\psi * \chi : G *_\phi H \rightarrow \overline{G} *_\phi \overline{H}$ is een goed gedefinieerd morfisme. Er rest nog aan te tonen dat dit ook een isomorfisme is. Nu volgt door symmetrie dat $\psi^{-1} * \chi^{-1} : \overline{G} *_\phi \overline{H} \rightarrow G *_\phi H$ een morfisme is. Door de werking van $(\psi * \chi) \circ (\psi^{-1} * \chi^{-1})$ en $(\psi^{-1} * \chi^{-1}) \circ (\psi * \chi)$ te beschouwen op generatoren volgt $(\psi * \chi)^{-1} = (\psi^{-1} * \chi^{-1})$. Bijvoorbeeld, als $g \in R_G$, dan schrijven we $(\psi * \chi)(g') = \psi(g)' = (\overline{g}_1 \cdots \overline{g}_n)'$ waarbij $\overline{g}_1, \dots, \overline{g}_n \in S_{\overline{G}} \cup S_{\overline{G}}^{-1}$. Dan is $(\psi^{-1} * \chi^{-1})(\overline{g}_1' \cdots \overline{g}_n') = \psi^{-1}(\overline{g}_1 \cdots \overline{g}_n)' = g'$. Dit toont aan dat $\psi * \chi$ een isomorfisme is. Merk op dat we in dit bewijs geen informatie nodig hebben gehad over de gekozen presentaties of de ontbindingen van de elementen van de deelgroepen. Merk eveneens op dat dit argument geldig blijft indien in de relaties van R_ϕ enkel generatoren van A voorkomen. $\square$

Opmerking 2.1.6. In het bijzonder kunnen we $\overline{G} = G$ en $\overline{H} = H$ kiezen. Hieruit volgt dat $G *_\phi H$ niet afhangt van de gekozen presentaties en van de gekozen ontbindingen van de elementen $a \in A$ en $b \in B$, zolang we minstens één ontbinding voor elke generator van A en zijn beeld in B includeren in R_ϕ . Merk eveneens op dat indien ψ en χ canonische morfismen zijn, $\psi * \chi$ dat ook is. Dus als we $G *_\phi H$ op twee verschillende manieren definiëren waarbij enkel de keuzes van de ontbindingen van de elementen verschillen, dan zijn de twee resulterende geamalgameerde producten altijd canonisch isomorf met elkaar.

De volgende stelling vormt de basis van de theorie rond geamalgameerde producten. Ze biedt een manier om elk element van het geamalgameerd product op unieke wijze voor te stellen als product van elementen uit G' en H' . Deze voorstelling noemen we de normaalvorm van het element. Dit resultaat geeft veel inzicht in de structuur van het

geamalgameerd product. In het bijzonder zal hieruit volgen dat de morfismen $G \rightarrow G'$ en $H \rightarrow H'$ injectief zijn, zodat we G en H kunnen zien als deelgroep van $G *_\phi H$. Het bewijs van deze stelling is overgenomen uit [20, Stelling 1].

Stelling 2.1.7. *Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij T_A, T_B verzamelingen van representanten van de rechter nevenklassen van respectievelijk A in G en B in H . Dan bestaat voor elk element $x \in G *_\phi H$ een unieke rij $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ van elementen in $G \cup H$ die voldoet aan de eigenschappen*

1. $x_0 \in A$
2. $x_i \in T_A \setminus \{1\}$ of $x_i \in T_B \setminus \{1\}$ als $1 \leq i \leq n$
3. $x_i \in T_A \setminus \{1\} \implies x_{i+1} \in T_B \setminus \{1\}$ als $1 \leq i < n$
4. $x_i \in T_B \setminus \{1\} \implies x_{i+1} \in T_A \setminus \{1\}$ als $1 \leq i < n$
5. $x = x'_0 x'_1 \cdots x'_n$

Bewijs. Zij X de verzameling van rijen $(x_0, \dots, x_n)$ die aan de eerste vier voorwaarden voldoen. Zij X_A (respectievelijk X_B) de deelverzameling van X bestaande uit rijen $(1, x_1, \dots, x_n)$ met $x_1 \in T_B \setminus \{1\}$ als $n > 0$ (respectievelijk $x_1 \in T_A \setminus \{1\}$ als $n > 0$). Dan definiëren we

$$\begin{aligned} \theta_A : G \times X_A \rightarrow X : \begin{cases} (a, (1, x_1, \dots, x_n)) \mapsto (a, x_1, \dots, x_n) & a \in A \\ (ax_0, (1, x_1, \dots, x_n)) \mapsto (a, x_0, x_1, \dots, x_n) & a \in A, x_0 \in T_A \setminus \{1\} \end{cases} \\ \theta_B : H \times X_B \rightarrow X : \begin{cases} (b, (1, x_1, \dots, x_n)) \mapsto (\phi^{-1}(b), x_1, \dots, x_n) & b \in B \\ (bx_0, (1, x_1, \dots, x_n)) \mapsto (\phi^{-1}(b), x_0, x_1, \dots, x_n) & b \in B, x_0 \in T_B \setminus \{1\} \end{cases} \end{aligned}$$

Het is makkelijk in te zien dat θ_A en θ_B bijectief zijn. We definiëren nu

$$\begin{aligned} \alpha_A : G \rightarrow \text{Sym}(X) : g^* \mapsto [\theta_A(g, x) \mapsto g^* \cdot \theta_A(g, x) := \theta_A(g^*g, x)] \\ \alpha_B : H \rightarrow \text{Sym}(X) : h^* \mapsto [\theta_B(h, x) \mapsto h^* \cdot \theta_B(h, x) := \theta_B(h^*h, x)] \end{aligned}$$

Men gaat eenvoudig na dat α_A en α_B morfismen zijn. Met andere woorden, α_A en α_B definiëren acties van G en H op X . Men gaat eveneens na dat voor elke $a \in A$, de werking van $\alpha_A(a)$ en $\alpha_B(\phi(a))$ op X dezelfde is, en gegeven wordt door

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (ax_0, \dots, x_n)$$

Bijgevolg zijn de voorwaarden van lemma 2.1.4 voldaan, en kunnen we α_A en α_B uitbreiden tot een actie $\alpha : G *_\phi H \rightarrow \text{Sym}(X)$. Zij nu $(x_0, \dots, x_n) \in X$, en beschouw $g = x'_0 \cdots x'_n \in G *_\phi H$. Per inductie op n tonen we aan dat $g \cdot e = (x_0, \dots, x_n)$, waarbij $e = (1) \in X$ de triviale rij is. Merk op dat $e = \theta_A(1, e) = \theta_B(1, e)$. Als $n = 0$, dan is

$$x'_0 \cdot e = \alpha(x'_0)(e) = \alpha_A(x_0)(e) = x_0 \cdot \theta_A(1, e) = \theta_A(x_0, e) = (x_0)$$

Zij nu $n = 1$. Beschouw eerst het geval $x_1 \in T_A \setminus \{1\}$. Er geldt

$$x'_0 x'_1 \cdot e = (x_0 x_1)' \cdot e = \alpha_A(x_0 x_1)(e) = \theta_A(x_0 x_1, e) = (x_0, x_1)$$

In het geval $x_1 \in T_B \setminus \{1\}$ kunnen we dezelfde berekening maken, gebruikmakend van $x'_0 = \phi(x_0)'$. Zij nu $n \geq 2$. Uit de inductiehypothese volgt dat $x'_2 \cdots x'_n \cdot e = (1, x_2, \dots, x_n) =: x$. Zij nu opnieuw eerst $x_1 \in T_A \setminus \{1\}$. Dan ziet men in dat $x = \theta_A(1, x)$, zodat

$$x'_0 x'_1 \cdot x = \alpha_A(x_0 x_1)(x) = \theta_A(x_0 x_1, x) = (x_0, \dots, x_n)$$

Als $x_1 \in T_B \setminus \{1\}$, dan is $x = \theta_B(1, x)$ en kunnen we opnieuw dezelfde berekening maken gebruik makend van $x'_0 = \phi(x_0)'$. Dit vervolledigt de inductie. Uit $x'_0 \cdots x'_n \cdot e = (x_0, \dots, x_n)$ volgt nu de injectiviteit van de functie $F : X \rightarrow G *_\phi H : (x_0, \dots, x_n) \mapsto x'_0 \cdots x'_n$. We moeten enkel nog aantonen dat deze functie ook surjectief is. Aangezien $F(e) = 1$ volstaat het om aan te tonen dat als $x'_0 \cdots x'_n$ in het beeld van F is bevat, dan ook $s'x'_0 \cdots x'_n$, waarbij $s \in S_G^{\pm 1} \cup S_H^{\pm 1}$. Als $s \in S_G \cup S_G^{-1}$, dan is $s = g_0 g_1$ met $g_0 \in A$ en $g_1 \in T_A$. Als $g_1 = 1$, dan is $s'x'_0 \cdots x'_n = F(g_0 x_0, \dots, x_n)$. Onderstel dus $g_1 \in T_A \setminus \{1\}$. Als $n = 0$ of $x_1 \in T_B \setminus \{1\}$, dan is

$$(g_0 g_1)'x'_0 \cdots x'_n = g'_0(y_0 y_1)'x'_1 \cdots x'_n = F(g_0 y_0, y_1, x_1, \dots, x_n)$$

waarbij $y_0 \in A$ en $y_1 \in T_A \setminus \{1\}$ zo gekozen zijn dat $y_0 y_1 = g_1 x_0$. In het geval $n \geq 1$ en $x_1 \in T_A \setminus \{1\}$ is

$$(g_0 g_1)'x'_0 \cdots x'_n = g'_0(y_0 y_1)'x'_2 \cdots x'_n = \begin{cases} F(g_0 y_0, x_2, \dots, x_n) & y_1 = 1 \\ F(g_0 y_0, y_1, x_2, \dots, x_n) & y_1 \neq 1 \end{cases}$$

waarbij $y_0 \in A$ en $y_1 \in T_A$ met $y_0 y_1 = g_1 x_0 x_1$. Dit bewijst het geval $s \in S_G \cup S_G^{-1}$. In het geval $s \in S_H \cup S_H^{-1}$ schrijft men $s = h_0 h_1$, waarbij $h_0 \in B$ en $h_1 \in T_B$. Er geldt dan

$$(h_0 h_1)'x'_0 \cdots x'_n = (\phi^{-1}(h_0)h_1)'\phi(x_0)'x'_1 \cdots x'_n$$

en men kan analoog te werk gaan als bij het geval $s \in S_G$. Dit bewijst de stelling. $\square$

Definitie 2.1.8. Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij $x \in G *_\phi H$ een element met normaalvorm $(x_0, x_1, \dots, x_n)$. Onder de lengte van de normaalvorm van x verstaan we het getal $n \in \mathbb{N}$. We definiëren de lengte van x als de lengte van zijn normaalvorm.

Merk op dat we uit het bewijs stelling 2.1.7 het volgende kunnen afleiden:

Gevolg 2.1.9. Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als $x \in G *_\phi H$ kan geschreven worden als een product van n factoren die alternerend in G en H bevat zijn, dan is de lengte van x hoogstens n .

Bewijs. Onderstel dat $x = x'_1 \cdots x'_n$, waarbij de elementen x_i alternerend in G en H bevat zijn. Het bewijs gaat per inductie op n . Als $n = 1$ en bijvoorbeeld $x_1 \in G$, dan ontbinden we x_1 in een deel in A en een deel in T_A , waaruit we een normaalvorm van x krijgen van lengte hoogstens 1. Als $n \geq 2$ en $x_1 \in G$, dan volgt zoals in het bewijs van de surjectiviteit van F in stelling 2.1.7 dat de lengte van $x = x'_1 \cdots x'_n$ maar met één kan verhogen ten opzichte van de lengte van $x'_2 \cdots x'_n$. Hetzelfde geldt als $x_1 \in H$. Het gestelde volgt nu per inductie. $\square$

Gevolg 2.1.10. Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. De canonische morfismen $G \rightarrow G *_\phi H : g \mapsto g'$ en $H \rightarrow G *_\phi H : h \mapsto h'$ zijn injectief, en bijgevolg kunnen we G en H zien als deelgroep van $G *_\phi H$.

Bewijs. Zij $g_1, g_2 \in G$ met $g_1 \neq g_2$. Onderstel dat $g_1 = a_1 s_1$ en $g_2 = a_2 s_2$, waarbij $a_1, a_2 \in A$ en $s_1, s_2 \in T_A$. Dan is ofwel $a_1 \neq a_2$, ofwel $s_1 \neq s_2$. Omdat $g \mapsto g'$ een morfisme is volgt $g'_1 = a'_1 s'_1$ en $g'_2 = a'_2 s'_2$. Als $g'_1 = g'_2$, dan volgt een contradictie uit stelling 2.1.7. Voor $h_1, h_2 \in H$ kunnen we hetzelfde argument toepassen, want nu geldt $h'_1 = b'_1 t'_1 = \phi^{-1}(b_1)'t'_1$ en $h'_2 = b'_2 t'_2 = \phi^{-1}(b_2)'t'_2$ voor zekere elementen $b_1, b_2 \in B$ en $t_1, t_2 \in T_B$. $\square$

Gevolg 2.1.11. Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. In $G *_\phi H$ geldt $G' \cap H' = A' = B'$.

Bewijs. Uit $a' = \phi(a)'$ voor $a \in A$ en $\phi^{-1}(b)' = b'$ voor $b \in B$ volgen respectievelijk $A' \subseteq B'$ en $B' \subseteq A'$. Verder volgt uit $A' = B'$ dat $A' \subseteq G' \cap H'$. We tonen nu aan dat ook $G' \cap H' \subseteq A'$, wat equivalent is met $(G' \setminus A') \cap H' = \emptyset$. Zij dus $g' \in G' \setminus A'$. In normaalvorm is $g' = g'_0 g'_1$ met $g_0 \in A$ en $g_1 \in T_A \setminus \{1\}$. Als $g' \in H'$, dan moet ofwel $g' = h'_0 = \phi^{-1}(h_0)'$ met $h_0 \in B$, ofwel $g' = h'_0 h'_1 = \phi^{-1}(h_0)' h'_1$ met $h_0 \in B$ en $h_1 \in T_B \setminus \{1\}$. In elk geval krijgen we een contradictie omdat we twee verschillende normaalvormen van g' zouden hebben. We besluiten dus dat $G' \cap H' \subseteq A'$, en dus $G' \cap H' = A'$. $\square$

Vanaf nu zullen we in elke stelling van deze sectie aannemen dat groepen $A \leq G$ en $B \leq H$ gegeven zijn, samen met een isomorfisme $\phi : A \rightarrow B$. We construeren dan het geamalgameerd product $G *_\phi H$, en beschouwen verder G en H , samen met hun gemeenschappelijke deelgroep A , als deelgroepen van $G *_\phi H$. Men ziet makkelijk in dat we in stelling 2.1.7 alle optredende accenten kunnen weglaten. Bovendien vertaalt lemma 2.1.4 zich naar

Lemma 2.1.12. Zij $\psi : G \rightarrow K$ en $\chi : H \rightarrow K$ morfismen zodat $\psi(a) = \chi(a)$ voor elke $a \in A$. Dan bestaat een uniek morfisme $\psi * \chi : G *_\phi H \rightarrow K$ die de morfismen ψ en χ uitbreidt.

Bewijs. Als we gebruik zouden maken van de notaties G' en H' , dan worden de morfismen in de opgave gegeven door $\psi' : G' \rightarrow K$ en $\chi' : H' \rightarrow K$, en er geldt $\psi'(a') = \chi'(a')$ voor elke $a \in A$. Men vertaalt deze morfismen naar morfismen $\psi : G \rightarrow K$ en $\chi : H \rightarrow K$ door middel van de isomorfismen $G \rightarrow G'$ en $H \rightarrow H'$. Uit $a' = \phi(a)'$ voor $a \in A$ volgt $\psi'(a') = \chi'(\phi(a)')$, waaruit $\psi(a) = (\chi \circ \phi)(a)$. Door toepassing van lemma 2.1.4 krijgen we een morfisme $\psi * \chi : G *_\phi H \rightarrow K$, waarvoor het volgende diagram commuteert.

$$\begin{array}{ccccccc}
 G & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G *_\phi H & \longleftarrow & H' \longleftarrow H \\
 & & \searrow \psi' & & \downarrow \psi * \chi & & \swarrow \chi' \\
 & & & & K & & \\
 & \searrow \psi & & & & & \swarrow \chi \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

Dit diagram zegt precies dat $\psi * \chi$ een uitbreiding is van ψ' en χ' , hetgeen we moesten bewijzen. $\square$

Merk op dat bovenstaand diagram ook omgekeerd aantoont dat lemma 2.1.4 volgt uit lemma 2.1.12. Beide formuleringen zijn dus equivalent. In latere hoofdstukken zullen we af en toe teruggrijpen naar de notaties G' en H' , indien er verwarring mogelijk is.

Stelling 2.1.7 heeft ook een alternatieve formulering in termen van zogenaamde ‘gereduceerde rijen’. Deze andere formulering is welgekend in de literatuur en zal handig blijken voor het vervolg.

Definitie 2.1.13. Een rij $(x_1, \dots, x_n)$ van elementen van $G *_\phi H$ wordt gereduceerd genoemd als ofwel $n = 1$ en $x_1 \in G \cup H$,¹ ofwel $n > 1$ en

1. $x_i \in G \setminus A$ of $x_i \in H \setminus A$ als $1 \leq i \leq n$
2. $x_i \in G \setminus A \implies x_{i+1} \in H \setminus A$ als $1 \leq i < n$

¹ In [14] wordt ook de voorwaarde $x_1 \neq 1$ opgelegd. Het zal echter handiger blijken om ook het geval $x_1 = 1$ toe te laten.

3. $x_i \in H \setminus A \implies x_{i+1} \in G \setminus A$ als $1 \leq i < n$

Stelling 2.1.14. *Zij $(x_1, \dots, x_n)$ en $(y_1, \dots, y_m)$ gereduceerde rijen van elementen van $G *_\phi H$. Als $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$, dan geldt*

1. $n = m$
2. Als $n = m = 1$, dan is $x_1 = y_1 \in G \cup H$
3. Als $n = m > 1$, dan behoren x_i en y_i tot dezelfde factor, voor elke $1 \leq i \leq n$.

Bewijs. In het geval $x_1 \notin A$ bewijzen we per inductie op n dat:

1. $x_1 \cdots x_n$ heeft een normaalvorm $z_0 z_1 \cdots z_n$
2. Als $x_i \in G \setminus A$, dan $z_i \in T_A \setminus \{1\}$
3. Als $x_i \in H \setminus A$, dan $z_i \in T_B \setminus \{1\}$

In het andere geval moet $n = 1$ en is x_1 een normaalvorm. Merk op dat de stelling dan volgt uit de uniciteit van de normaalvorm, aangezien we een normaalvorm van $y_1 \cdots y_m$ kunnen vinden die ook van deze vorm is. We bekomen $z_0 \cdots z_n$ op een manier die analoog is aan het bewijs van de surjectiviteit van F in stelling 2.1.7. Als $n = 1$, dan kunnen we x_1 ontbinden in een deel in A en een deel in $T_A \setminus \{1\}$, waaruit het gestelde volgt. Als $n > 1$, dan bekomen we uit de inductiehypothese een normaalvorm $z_1 \cdots z_n$ van $x_2 \cdots x_n$ die voldoet aan de eigenschappen. We beschouwen enkel het geval $x_1 \in G \setminus A$. Het geval $x_1 \in H \setminus A$ verloopt analoog. Omdat $x_2 \in H \setminus A$, moet $z_2 \in T_B \setminus \{1\}$. Omdat $z_1 \in A$ is ook $x_1 z_1 \in G \setminus A$. Schrijf dus $x_1 z_1 = g_0 g_1$ met $g_0 \in A$ en $g_1 \in T_A \setminus \{1\}$. Dan zien we dat $g_0 g_1 z_2 \cdots z_n$ de normaalvorm is van $x_1 \cdots x_n$, en deze normaalvorm voldoet aan de gestelde eigenschappen. $\square$

Gevolg 2.1.15. *Zij $(x_1, \dots, x_n)$ een gereduceerde rij van elementen van $G *_\phi H$. Als $x_1 \neq 1$, dan is $x_1 \cdots x_n \neq 1$*

Bewijs. Het bewijs volgt onmiddellijk uit de voorgaande stelling, aangezien $1 \in G *_\phi H$ wordt bekomen als product van de elementen van de gereduceerde rij (1). $\square$

In sommige bewijzen is het handig om over een element $x \in G *_\phi H$ te beschikken zodanig dat we controle hebben over de lengte van x^m , voor elke $m \in \mathbb{N}$. We introduceren hiervoor de notie van een cyclisch gereduceerd element.

Definitie 2.1.16. Een rij $(x_1, \dots, x_n)$ wordt cyclisch gereduceerd genoemd als ze gereduceerd is, en x_1 en x_n niet tot dezelfde factor behoren in het geval $n \geq 2$. Een element $x \in G *_\phi H$ is cyclisch gereduceerd als x het product is van de elementen van een cyclisch gereduceerde rij.

Zij de normaalvorm van x gegeven door $(x_0, \dots, x_n)$. Dan geldt dat x cyclisch gereduceerd is als en slechts als ofwel x_1 en x_n niet tot dezelfde factor behoren, ofwel $n \leq 1$. Deze equivalente formulering volgt uit stelling 2.1.14 en het feit dat $(x_0 x_1, \dots, x_n)$ een gereduceerde rij is. Als $n \leq 1$, of equivalent $x \in G \cup H$, dan is ook $x^m \in G \cup H$ voor elke $m \in \mathbb{N}$. Bijgevolg heeft x^m lengte hoogstens één voor elke $m \in \mathbb{N}$. Stel nu dat x_1 en x_n niet tot dezelfde factor behoren, en zij $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Dan bekomen we een gereduceerde rij waarvan het product x^m is door m kopieën van de rij $(x_0 x_1, \dots, x_n)$ samen te voegen. Anderzijds, als k de lengte is van de normaalvorm van x^m dan is x^m het product van een gereduceerde rij van lengte $\max(1, k)$. Door stelling 2.1.14 moet $k = mn$. In het

bijzonder toont dit aan dat als $x \in G *_\phi H$ cyclisch gereduceerd is en $x \notin G \cup H$, dan is ook $x^m \notin G \cup H$ voor elke $m \in \mathbb{N}_{>0}$.

Lemma 2.1.17. *Elke $x \in G *_\phi H$ is toegevoegd aan een cyclisch gereduceerd element.*

Bewijs. Per inductie op de lengte n van x . Als $n \leq 1$, dan is het gestelde duidelijk. Zij dus $x = x_0 \cdots x_n$ met $n > 1$, en onderstel dat x niet cyclisch gereduceerd is. Onderstel dat $x_1, x_n \in G$. Het geval $x_1, x_n \in H$ gaat analoog. Dan beschouwen we $x_n x x_n^{-1} = x_n x_0 x_1 \cdots x_{n-1} =: y$. Als $x_n x_0 x_1 \in A$, dan heeft y lengte $n - 2$, en door de inductiehypothese is $c^{-1} y c$ cyclisch gereduceerd voor een zekere $c \in G *_\phi H$. Het gestelde volgt uit $c^{-1} y c = (x_n^{-1} c)^{-1} x (x_n^{-1} c)$. Als $x_n x_0 x_1 \in G \setminus A$ dan is $x_n x_0 x_1 = y_0 y_1$ voor zekere $y_0 \in A$ en $y_1 \in T_A \setminus \{1\}$. Dan heeft y lengte $n - 1$ en volgt het gestelde opnieuw per inductie. $\square$

Het bewijs van de volgende stelling is afkomstig uit [16, Sectie 13-14]. Dit resultaat toont aan dat het geamalgameerd product van G en H in zekere zin niet de minimale groep is die voldoet aan de eigenschappen van 2.1.10 en 2.1.11.

Stelling 2.1.18. *Als G en H eindig zijn, dan bestaat een morfisme $\psi : G *_\phi H \rightarrow S$, met S een eindige groep en zodat ψ injectief is op zowel G als H . Bovendien geldt dat $\psi(G) \cap \psi(H) = \psi(A)$.*

Bewijs. Definieer

$$\begin{aligned}\psi_G : G &\rightarrow \text{Sym}(G \times H) : g^* \mapsto [(g, h) \mapsto (g^* g, h)] \\ \psi_H : H &\rightarrow \text{Sym}(G \times H) : h^* \mapsto [(g, h) \mapsto (g, h^* h)]\end{aligned}$$

Het is makkelijk in te zien dat ψ_G en ψ_H goed gedefinieerde monomorfismen zijn. We definiëren nu een functie $\pi : (G \times H) \rightarrow (G \times H)$ als volgt. Als $(g, h) \in G \times H$, schrijf dan $g = g_0 g_1$ met $g_0 \in A$, $g_1 \in T_A$, en $h = h_0 h_1$ met $h_0 \in B$, $h_1 \in T_B$. Definieer dan

$$\pi(g_0 g_1, h_0 h_1) = (h_0 g_1, g_0 h_1)$$

Duidelijk is $\pi^2 = \text{id}$, en dus is $\pi \in \text{Sym}(G \times H)$. Men gaat eenvoudig na dat

$$\pi \circ \psi_H(a) \circ \pi = \psi_G(a)$$

geldt in $\text{Sym}(G \times H)$, voor elke $a \in A$. We tonen nu de volgende sterkere eigenschap aan

$$\pi \circ \psi_H(h^*) \circ \pi = \psi_G(g^*) \iff g^* = h^* \in A \quad (2.1)$$

We berekenen

$$\begin{aligned}(\pi \circ \psi_H(h^*) \circ \pi)(g_0 g_1, h_0 h_1) &= \pi(h_0 g_1, h^* g_0 h_1) \\ &= (\tilde{h}_0 g_1, h_0 \tilde{h}_1)\end{aligned}$$

waarbij $h^* g_0 h_1 = \tilde{h}_0 \tilde{h}_1$, $\tilde{h}_0 \in B$ en $\tilde{h}_1 \in T_B$. Stel nu dat het linkerlid van (2.1) geldt. Dan moet

$$\begin{aligned}\tilde{h}_0 g_1 &= g^* g_0 g_1 \\ h_0 \tilde{h}_1 &= h_0 h_1\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\tilde{h}_1 = h_1$ en $\tilde{h}_0 = g^* g_0$. Aangezien $\tilde{h}_0 \tilde{h}_1 = h^* g_0 h_1$ moet $h^* g_0 = \tilde{h}_0 \in A$, en dus $h^* \in A$. Uit $\tilde{h}_0 = g^* g_0$ volgt $h^* g_0 = g^* g_0$, dus $h^* = g^*$. Hiermee is (2.1) aangetoond. Met lemma 2.1.12 vinden we een unieke uitbreiding van ψ_G en $\pi \circ \psi_H \circ \pi$ tot $\psi : G *_\phi H \rightarrow \text{Sym}(G \times H)$. De injectiviteit van ψ op G en op H wordt overgeërfd van de injectiviteit van ψ_G en ψ_H . Dat $\psi(G) \cap \psi(H) = \psi(A)$ volgt uit (2.1). $\square$

2.2 HNN-extensies

Definitie 2.2.1. Zij G een groep met presentatie

$$G = \langle S \mid R \rangle$$

waarbij $S = \{g_i \mid i \in I\}$. Zij $t \notin S$ een nieuw symbool, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme tussen twee deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$. Zij voor elke $a \in A$ en $b \in B$ gegeven ontbindingen $a \equiv a(g_i)$ en $b \equiv b(g_j)$ in functie van de generatoren van G . We definiëren de HNN-extensie van G met betrekking tot ϕ als

$$G*_{\phi} := \langle S, t \mid R, R_{\phi} \rangle$$

waarbij $R_{\phi} = \{t^{-1}a(g_i)t = \phi(a)(g_j) \mid a \in A\}$

Opnieuw kunnen we de relaties in R_{ϕ} beperken tot relaties met betrekking tot een verzameling generatoren van A . We zullen net zoals in de vorige sectie aantonen dat in deze definitie de ontbindingen van de elementen van A en de gekozen presentatie van G geen rol spelen.

Het idee van de HNN-extensie van G met betrekking tot $\phi : A \rightarrow B$ is dat we een groep $G*_{\phi}$ construeren die G bevat, en waarin de deelgroepen A en B toegevoegd zijn aan elkaar door een nieuw element t , dat we de stabiele generator noemen.² Opnieuw zal volgen uit de normaalvorm gegeven in stelling 2.2.5 dat deze intuïtie daadwerkelijk klopt. De groep G wordt de basis van de HNN-extensie $G*_{\phi}$ genoemd, en A en B zijn de geassocieerde deelgroepen.

De substitutietest geeft ons opnieuw een canonisch morfisme $G \rightarrow G*_{\phi} : g \mapsto g'$. We zullen net zoals bij het geamalgameerd product aantonen dat dit morfisme injectief is.

Lemma 2.2.2. *Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij $\psi : G \rightarrow K$ een morfisme en $k \in K$ zodat $k^{-1}\psi(a)k = (\psi \circ \phi)(a)$ voor elke $a \in A$. Dan bestaat een uniek morfisme $\Psi : G*_{\phi} \rightarrow K$ met de eigenschap dat $\Psi(g') = \psi(g)$ voor alle $g \in G$ en $\Psi(t) = k$.*

Bewijs. Het morfisme Ψ moet een uitbreiding zijn van $\theta : S \cup \{t\} \rightarrow K$ gedefinieerd door $\theta(g_i) = \psi(g_i)$ en $\theta(t) = k$. We gaan na dat de voorwaarden van de substitutietest voldaan zijn, waaruit het gestelde volgt. Als $r \in R$, dan geldt $r[\theta(s)/s] = 1$ in K doordat ψ een morfisme is. Zij dus $r \equiv t^{-1}a(g_i)t \cdot \phi(a)^{-1}(g_j) \in R_{\phi}$. Dan is $r[\theta(s)/s] \equiv k^{-1}a[\psi(g_i)/g_i]k \cdot \phi(a)^{-1}[\psi(g_j)/g_j]$. Omdat ψ een morfisme is geldt in K dat $r[\theta(s)/s] = k^{-1}\psi(a)k \cdot ((\psi \circ \phi)(a))^{-1}$. Het rechterlid is nu triviaal, want $k^{-1}\psi(a)k = (\psi \circ \phi)(a)$. $\square$

Stelling 2.2.3. *Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij $G \cong \bar{G}$, en zij $\bar{\phi} : \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ het morfisme dat verkregen wordt uit het diagram*

$$\begin{array}{ccccccc} G & \longleftarrow & A & \xrightarrow{\phi} & B & \longrightarrow & G \\ \downarrow \psi & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \psi \\ \bar{G} & \longleftarrow & \bar{A} & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \bar{B} & \longrightarrow & \bar{G} \end{array}$$

*Dan is $G*_{\phi} \cong \bar{G}*_{\bar{\phi}}$, ongeacht van de gekozen presentaties, en ongeacht de ontbindingen van de elementen van de geassocieerde deelgroepen.*

² In de literatuur wordt t meestal de ‘stable letter’ genoemd.

Bewijs. Stel dat $G*_\phi$ en $\overline{G}*_\phi$ gedefinieerd zijn met betrekking tot zekere vaste presentaties van G en $\overline{G}$, en zekere vaste ontbindingen van de elementen van A , B , $\overline{A}$ en $\overline{B}$. Onderstel dat de stabiele generatoren van $G*_\phi$ en $\overline{G}*_\phi$ respectievelijk gegeven worden door t en $\bar{t}$. Zij $\psi : G \rightarrow \overline{G}$ een isomorfisme. We kunnen ψ uitbreiden tot

$$\psi : G \rightarrow \overline{G} \rightarrow \overline{G}*_\phi : g \mapsto \psi(g)'$$

We willen nu deze ψ uitbreiden tot een morfisme $\Psi : G*_\phi \rightarrow \overline{G}*_\phi$ waarvoor $\Psi(t) = \bar{t}$. Uit het diagram in de opgave en omdat $\bar{t}^{-1} \cdot \bar{a}' \cdot \bar{t} = \phi(\bar{a})'$ geldt in $\overline{G}*_\phi$ volgt dat de voorwaarden van lemma 2.2.2 voldaan zijn. We moeten dus enkel nog aantonen dat Ψ een isomorfisme is. Door symmetrie bestaat een uitbreiding $\overline{\Psi} : \overline{G}*_\phi \rightarrow G*_\phi$ van ψ^{-1} waarvoor $\overline{\Psi}(\bar{t}) = t$. Door de werking van $\Psi \circ \overline{\Psi}$ en $\overline{\Psi} \circ \Psi$ te beschouwen op generatoren volgt dat $\overline{\Psi} = \Psi^{-1}$. Merk op dat we geen gebruik hebben gemaakt van de gekozen presentaties en de ontbindingen van de elementen van de deelgroepen. $\square$

Opmerking 2.2.4. Opnieuw kunnen we $G = \overline{G}$ stellen om in te zien dat de definitie van $G*_\phi$ niet afhangt van de keuze van de presentatie van G en de ontbindingen van de elementen van A en B . Het morfisme Ψ geconstrueerd in voorgaande stelling is canonisch indien ψ dat is, dus twee verschillende keuzes van ontbindingen leiden tot twee HNN-extensies die canonisch isomorf zijn.

Het bewijs van de volgende stelling is overgenomen uit [14, Hoodstuk 4, Stelling 2.1]. Deze stelling biedt een normaalvorm voor HNN-extensies en vormt de basis van de theorie rond HNN-extensies.

Stelling 2.2.5. *Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij T_A , T_B verzamelingen van representanten van de rechter nevenklassen van respectievelijk A en B in G . Dan bestaat voor elk element $x \in G*_\phi$ een unieke rij $(x_0, t^{\varepsilon_1}, x_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$ die voldoet aan de eigenschappen*

1. $x_0 \in G$
2. $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ als $1 \leq i \leq n$
3. $\varepsilon_i = -1 \implies x_i \in T_A$ als $1 \leq i \leq n$
4. $\varepsilon_i = +1 \implies x_i \in T_B$ als $1 \leq i \leq n$
5. Er bestaat geen deelrij van de vorm $(t^{-1}, 1, t)$ of $(t, 1, t^{-1})$
6. $x = x'_0 t^{\varepsilon_1} x'_1 \dots t^{\varepsilon_n} x'_n$

Bewijs. Het bewijs gaat analoog aan dat van de normaalvorm van het geamalgameerd product. Zij X de verzameling van rijen $(x_0, t^{\varepsilon_1}, x_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$ die aan de eerste vijf voorwaarden voldoen. Definieer nu

$$\alpha_G : G \rightarrow \text{Sym}(X) : g^* \mapsto [(x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \mapsto (g^* x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)]$$

Duidelijk is α_G een morfisme. Definieer vervolgens $\sigma_t \in \text{Sym}(X)$ door

$$\sigma_t(x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) = \begin{cases} (\phi^{-1}(x_0)x_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) & n > 0, x_0 \in B, \varepsilon_1 = -1 \\ (\phi^{-1}(g_0), t, g_1, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) & \text{Anders} \end{cases}$$

waarbij $x_0 = g_0 g_1$ met $g_0 \in B$ en $g_1 \in T_B$. Door een gevallenonderscheid gaat men na dat $\text{im}(\sigma_t) \subseteq X$, en dat de inverse van σ_t wordt gegeven door

$$\sigma_t^{-1}(x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) = \begin{cases} (\phi(x_0)x_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) & n > 0, x_0 \in A, \varepsilon_1 = +1 \\ (\phi(g_0), t^{-1}, g_1, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) & \text{Anders} \end{cases}$$

waarbij $x_0 = g_0 g_1$ met $g_0 \in A$ en $g_1 \in T_A$. Dus $\sigma_t \in \text{Sym}(X)$. We willen nu α_G en σ_t uitbreiden tot $\alpha : G *_\phi \rightarrow \text{Sym}(X)$ met lemma 2.2.2. Hiervoor moeten we aantonen dat voor elke $a \in A$ geldt dat $\sigma_t^{-1} \alpha_G(a) \sigma_t = \alpha_G(\phi(a))$. Zij dus $(x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \in X$ willekeurig. We beschouwen eerst het geval $n > 0$, $x_0 \in B$ en $\varepsilon_1 = -1$. Dan is

$$\begin{aligned} \sigma_t^{-1} \alpha_G(a) \sigma_t(x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) &= \sigma_t^{-1} \alpha_G(a) (\phi^{-1}(x_0)x_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \\ &= \sigma_t^{-1} (a \phi^{-1}(x_0)x_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \\ &= (\phi(a)x_0, t^{-1}, x_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \end{aligned}$$

wat overeenkomt met $\alpha_G(\phi(a))(x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$. De derde gelijkheid is duidelijk als $x_1 \in T_A \setminus \{1\}$. Maar als $x_1 = 1$ dan moet ofwel $n = 1$, ofwel $\varepsilon_2 = -1$, en zitten we opnieuw in het tweede geval van de definitie van σ_t^{-1} . Onderstel nu dat het tweede geval in de definitie van σ_t zich voordoet. Zij $x_0 = g_0 g_1$ met $g_0 \in B$ en $g_1 \in T_B$. Dan is

$$\begin{aligned} \sigma_t^{-1} \alpha_G(a) \sigma_t(x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) &= \sigma_t^{-1} \alpha_G(a) (\phi^{-1}(g_0), t, g_1, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \\ &= \sigma_t^{-1} (a \phi^{-1}(g_0), t, g_1, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \\ &= (\phi(a)g_0 g_1, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \end{aligned}$$

wat opnieuw overeenkomt met $\alpha_G(\phi(a))(x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$. Zij nu $\alpha : G *_\phi \rightarrow \text{Sym}(X)$ de actie van $G *_\phi$ op X met $\alpha(g') = \alpha_G(g)$ voor $g \in G$ en $\alpha(t) = \sigma_t$. We bewijzen vervolgens dat voor elke rij $(x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \in X$ geldt dat $x'_0 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} x'_n \cdot e = (x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$, waarbij $e = (1)$ de triviale rij is. Hieruit volgt dan de injectiviteit van de functie $F : X \rightarrow G *_\phi : (x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) \mapsto x'_0 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} x'_n$, en dus de uniciteit van de normaalvorm. We werken per inductie op n . Als $n = 0$, dan is

$$x'_0 \cdot e = \alpha(x'_0)(e) = \alpha_G(x_0)(e) = (x_0)$$

Zij nu $n > 0$. Uit de inductiehypothese volgt $x'_1 t^{\varepsilon_2} \dots t^{\varepsilon_n} x'_n \cdot e = (x_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) =: x$. We beschouwen enkel het geval $\varepsilon_1 = +1$. Een analoog argument werkt voor $\varepsilon_1 = -1$.

$$x'_0 t^{\varepsilon_1} \cdot x = \alpha(x'_0 t^{\varepsilon_1})(x) = \alpha_G(x_0) \sigma_t(x)$$

Uit $\varepsilon_1 = +1$ volgt dat $x_1 \in T_B \setminus \{1\}$, $n = 1$, of $\varepsilon_2 = +1$. Daarom is

$$\alpha_G(x_0) \sigma_t(x) = \alpha_G(x_0) (\phi^{-1}(1), t, x_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) = (x_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$$

Dit vervolledigt de inductie. We moeten enkel nog aantonen dat de functie F ook surjectief is. Aangezien $F(e) = 1$ volstaat het aan te tonen dat als $x'_0 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} x'_n \in \text{im}(F)$, dan ook $s' x'_0 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} x'_n \in \text{im}(F)$ voor elke $s \in S^{\pm 1} \cup \{t^{\pm 1}\}$. Als $s \in S \cup S^{-1}$, dan is $s' x'_0 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} x'_n = F(sx_0, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$ en valt er niets te bewijzen. Onderstel dus dat $s = t^{\pm 1}$. We beschouwen het geval $s = t^{-1}$. Het geval $s = t$ gaat analoog. Schrijf $x_0 = g_0 g_1$ met $g_0 \in A$ en $g_1 \in T_A$. Omdat in $G *_\phi$ geldt dat $t^{-1} g'_0 t = \phi(g_0)'$, volgt

$$\begin{aligned} t^{-1} x'_0 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} x'_n &= \phi(g_0)' t^{-1} g'_1 t^{\varepsilon_1} \dots t^{\varepsilon_n} x'_n \\ &= \begin{cases} F(\phi(g_0), t^{-1}, g_1, t^{\varepsilon_1}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) & n = 0 \vee g_1 \in T_A \setminus \{1\} \\ F(\phi(g_0)x_1, t^{\varepsilon_2}, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) & n > 0 \wedge g_1 = 1 \wedge \varepsilon_1 = +1 \\ F(\phi(g_0), t^{-1}, 1, t^{-1}, x_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n) & n > 0 \wedge g_1 = 1 \wedge \varepsilon_1 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Hiermee is het gestelde bewezen. $\square$

Definitie 2.2.6. Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij $x \in G*_{\phi}$ een element met normaalvorm $(x_0, t^{\varepsilon_1}, x_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$. Onder de lengte van de normaalvorm van x verstaan we het getal $n \in \mathbb{N}$. We definiëren de lengte van x als de lengte van zijn normaalvorm.

Gevolg 2.2.7. Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als $x \in G*_{\phi}$ kan geschreven worden als een product van factoren in G' en factoren $t^{\pm 1}$ waarin n keer het symbool t voorkomt, dan is de lengte van x hoogstens n .

Bewijs. Onderstel dat $x = x'_0 t^{\varepsilon_1} x'_1 \cdots t^{\varepsilon_n} x'_n$, waarbij $x_i \in G$ en $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$. Het bewijs is per inductie op n . Als $n = 0$, dan is het gestelde triviaal. Stel nu dat $n > 0$. Uit het bewijs van de surjectiviteit van F in stelling 2.2.5 zien we dat de lengte van $t^{\varepsilon_1} x'_1 \cdots t^{\varepsilon_n} x'_n$ maar met één kan verhogen ten opzichte van de lengte van $x'_1 t^{\varepsilon_2} x'_2 \cdots t^{\varepsilon_n} x'_n$, en dat de lengte van x gelijk is aan de lengte van $t^{\varepsilon_1} x'_1 \cdots t^{\varepsilon_n} x'_n$. Het gestelde volgt nu per inductie. $\square$

Gevolg 2.2.8. Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Het canonische morfisme $G \rightarrow G*_{\phi} : g \mapsto g'$ is injectief, en bijgevolg kunnen we G zien als deelgroep van $G*_{\phi}$. Bovendien is het canonische morfisme $\mathbb{Z} \rightarrow G*_{\phi} : n \mapsto t^n$ injectief.

Bewijs. Als $g_1, g_2 \in G$ met $g_1 \neq g_2$, dan is $g'_1 \neq g'_2$ door de uniciteit van de normaalvorm van een element in $G*_{\phi}$. Dit bewijst de injectiviteit van $G \rightarrow G*_{\phi}$. De injectiviteit van $\mathbb{Z} \rightarrow \langle t \rangle$ volgt doordat de normaalvorm van t^n gegeven wordt door $\underbrace{(1, t, 1, \dots, t, 1)}_{n \text{ keer } t}$. $\square$

Gevolg 2.2.9. Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. In $G*_{\phi}$ geldt $t^{-1}A't = B'$, $t^{-1}G't \cap G' = B'$ en $G' \cap \langle t \rangle = \{1\}$.

Bewijs. Dat $t^{-1}A't = B'$ volgt uit de gelijkheden $t^{-1}a't = \phi(a)'$ en $t^{-1}\phi^{-1}(b)'t = b'$ die gelden in $G*_{\phi}$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$. Uit het voorgaande volgt dat $B' \subseteq t^{-1}G't \cap G'$. We tonen nu het omgekeerde aan. Onderstel daarvoor dat $g' \in t^{-1}G't \cap G'$. Dan kunnen we g' schrijven als $t^{-1}h't$, met $h \in G$. Zij nu $h = h_0 h_1$, met $h_0 \in A$ en $h_1 \in T_A$. Dan is $g' = \phi(h_0)'t^{-1}h_1't$. Als nu $h \notin A$, dan is $h_1 \in T_A \setminus \{1\}$ en heeft g' twee verschillende normaalvormen. Dus moet $h \in A$, wat betekent dat $g' \in B'$. Hiermee is aangetoond dat $t^{-1}G't \cap G' = B'$. Onderstel voor de derde bewering dat $t^k = g' \in G'$ voor een zekere $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dan zou t^k twee verschillende normaalvormen hebben, namelijk (g) en $(1, t^{\pm}, \dots, t^{\pm}, 1)$, waarbij het teken $\pm$ afhangt van het teken van k . Dit geeft een strijdigheid. $\square$

De volgende eigenschap wordt vermeld in [12] en is zelfstandig uitgewerkt.

Gevolg 2.2.10. Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Dan geldt $(G*_{\phi})/\langle\langle G' \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}$, waarbij $\langle\langle G' \rangle\rangle$ de normaaldeeler is van $G*_{\phi}$ voortgebracht door G' .

Bewijs. Zij $\psi : G \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ het triviale morfisme dat elk element op $0 \in \mathbb{Z}$ afbeeldt. Door lemma 2.2.2 bestaat een morfisme $\Psi : G*_{\phi} \rightarrow \mathbb{Z}$ met $\Psi(g') = 0$ voor elke $g \in G$ en $\Psi(t) = +1$. Het is duidelijk dat de kern van Ψ precies bestaat uit de elementen in $G*_{\phi}$ waarvoor de normaalvorm evenveel factoren t als t^{-1} bevat. Omdat $G' \leq \ker(\Psi)$ moet ook $\langle\langle G' \rangle\rangle \leq \ker(\Psi)$. Via een inductief argument zou men kunnen aantonen dat ook $\ker(\Psi) = \langle\langle G' \rangle\rangle$, waaruit het gestelde volgt aangezien $\text{im}(\Psi) = \mathbb{Z}$. Maar we kunnen op

een elegantere manier te werk gaan door gebruik te maken van de tweede isomorfiestelling. Definieer daarvoor $N = \langle \langle G' \rangle \rangle \trianglelefteq G *_\phi$ en $H = \langle t \rangle \leq G *_\phi$. Dan is $G *_\phi = HN$, en uit het voorgaande volgt dat $H \cap N = \{1\}$. Bijgevolg geldt

$$(G *_\phi)/N = HN/N \cong H/(H \cap N) = H \cong \mathbb{Z}$$

□

In wat volgt voor deze sectie beschouwen we een groep G met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en een isomorfisme $\phi : A \rightarrow B$. We construeren dan de HNN-extensie $G *_\phi$, en beschouwen verder G als deelgroep van $G *_\phi$. De groep G heeft deelgroepen A en B , die in $G *_\phi$ toegevoegd zijn aan elkaar door $t^{-1}At = B$. Meer specifiek vertaalt het isomorfisme $\phi : A \rightarrow B$ zich naar de toevoeging met t . Met andere woorden, $\phi(a) = t^{-1}at$ voor alle $a \in A$. We kunnen opnieuw de accenten in stelling 2.2.5 weglaten, en lemma 2.2.2 vertaalt zich naar

Lemma 2.2.11. *Zij $\psi : G \rightarrow K$ een morfisme en $k \in K$ zodat $k^{-1}\psi(a)k = \psi(\phi(a))$ voor elke $a \in A$. Dan bestaat een uniek morfisme $\Psi : G *_\phi \rightarrow K$ dat het morfisme ψ uitbreidt, en zodat $\Psi(t) = k$.*

Bewijs. Het bewijs gaat analoog als dat van lemma 2.1.12. Gegeven is dus een morfisme $\psi' : G' \rightarrow K$ waarvoor $k^{-1}\psi'(a')k = \psi'(\phi(a'))$ voor elke $a \in A$. Men vertaalt dit morfisme naar $\psi : G \rightarrow K$. Uit $k^{-1}\psi'(a')k = \psi'(\phi(a'))$ volgt dan $k^{-1}\psi(a)k = (\psi \circ \phi)(a)$. Door toepassing van lemma 2.2.2 krijgen we een morfisme $\Psi : G *_\phi \rightarrow K$ met $\Psi(t) = k$, en waarvoor het volgende diagram commuteert.

$$\begin{array}{ccccc} G & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G *_\phi \\ & \searrow \psi & \searrow \psi' & \searrow \Psi & \downarrow \Psi \\ & & & & K \end{array}$$

Dit diagram zegt precies dat Ψ een uitbreiding is van ψ' , hetgeen we moesten bewijzen. □

Ook voor HNN-extensies bestaat de notie van een gereduceerde rij. De normaalvorm heeft dan opnieuw een alternatieve formulering in termen van gereduceerde rijen. Met deze alternatieve formulering tonen we gevolg 2.2.14 aan, wat in de literatuur bekend staat als het Lemma van Britton. Dit lemma gaat terug naar het werk van Britton in [2].

Definitie 2.2.12. Een rij $(x_0, t^{\varepsilon_1}, x_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$ van elementen van $G *_\phi$ wordt gereduceerd genoemd als

1. $x_i \in G$ als $0 \leq i \leq n$ en $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ als $1 \leq i \leq n$
2. Er bestaat geen deelrij van de vorm (t^{-1}, a, t) met $a \in A$
3. Er bestaat geen deelrij van de vorm (t, b, t^{-1}) met $b \in B$

Stelling 2.2.13. *Zij $(x_0, t^{\varepsilon_1}, x_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$ en $(y_0, t^{\delta_1}, y_1, \dots, t^{\delta_m}, y_m)$ gereduceerde rijen van elementen van $G *_\phi$. Als $x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 \cdots t^{\varepsilon_n} x_n = y_0 t^{\delta_1} y_1 \cdots t^{\delta_m} y_m$, dan geldt*

1. $n = m$
2. Als $n = m = 0$, dan is $x_0 = y_0 \in G$
3. Als $n = m > 0$, dan is $\varepsilon_i = \delta_i$ voor elke $1 \leq i \leq n$

4. Zij $n = m > 0$.

- Als $\varepsilon_1 = +1$, dan $x_0 \in A \iff y_0 \in A$.
- Als $\varepsilon_n = -1$, dan $x_n \in A \iff y_n \in A$.
- Als $\varepsilon_1 = -1$, dan $x_0 \in B \iff y_0 \in B$.
- Als $\varepsilon_n = +1$, dan $x_n \in B \iff y_n \in B$.

Bewijs. Het bewijs is gelijkaardig met dat van stelling 2.1.14. We geven eerst een motivatie voor eigenschap 4 vermeld in de opgave. Uit de definiërende relaties van de HNN-extensie volgt dat $at = t\phi(a)$, voor elke $a \in A$. Als bijvoorbeeld $\varepsilon_1 = +1$, dan kunnen we dus elke factor $a \in A$ uit x_0 wegdelen en verschuiven naar rechts in het product $x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 \cdots t^{\varepsilon_n} x_n$. Maar dit verandert niets aan het feit dat $x_0 \in A$ of $x_0 \in G \setminus A$. Deze eigenschap zou pas gewijzigd kunnen worden indien we ook factoren $g \in G \setminus A$ uit x_0 zouden kunnen verplaatsen. Dezelfde motivatie geldt voor de andere gevallen. Meer precies bewijzen we per inductie op n dat $x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 \cdots t^{\varepsilon_n} x_n$ een normaalvorm $z_0 t^{\varepsilon_1} z_1 \cdots t^{\varepsilon_n} z_n$ heeft die voldoet aan eigenschap 4 in de opgave. Het gestelde volgt dan uit de uniciteit van de normaalvorm. Voor $n = 0$ is het gestelde triviaal. Als $n > 0$, dan volgt uit de inductiehypothese een normaalvorm $z_1 t^{\varepsilon_2} z_2 \cdots t^{\varepsilon_n} z_n$ van $x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_n} x_n$ met de gewenste eigenschappen. We beschouwen enkel het geval $\varepsilon_1 = -1$. Het andere geval $\varepsilon_1 = +1$ verloopt analoog. Schrijf $z_1 = g_0 g_1$ met $g_0 \in A$ en $g_1 \in T_A$. Dan is

$$x_0 t^{-1} x_1 \cdots t^{\varepsilon_n} x_n = x_0 t^{-1} z_1 t^{\varepsilon_2} z_2 \cdots t^{\varepsilon_n} z_n = x_0 \phi(g_0) t^{-1} g_1 t^{\varepsilon_2} z_2 \cdots t^{\varepsilon_n} z_n$$

De enige manier waardoor de rechterkant geen normaalvorm zou zijn, is als $\varepsilon_2 = +1$ en $g_1 = 1$. We tonen aan dat dit geval zich niet voordoet. Uit $\varepsilon_2 = +1$ volgt dat $x_1 \in G \setminus A$. Door eigenschap 4 waaraan $z_1 t^{\varepsilon_2} z_2 \cdots t^{\varepsilon_n} z_n$ moet voldoen is $z_1 \in G \setminus A$, zodat $g_1 \neq 1$. Dus $x_0 \phi(g_0) t^{-1} g_1 t^{\varepsilon_2} z_2 \cdots t^{\varepsilon_n} z_n$ is een normaalvorm. Bovendien gaat men na dat deze normaalvorm opnieuw voldoet aan eigenschap 4. $\square$

Gevolg 2.2.14 (Lemma van Britton). *Zij $(x_0, t^{\varepsilon_1}, x_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$ een gereduceerde rij van elementen van $G *_\phi$. Als $n > 0$ of $x_0 \neq 1$, dan is $x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 \cdots t^{\varepsilon_n} x_n \neq 1$.*

Bewijs. Dit volgt direct uit de voorgaande stelling, aangezien de rij (1) gereduceerd is. $\square$

Definitie 2.2.15. Een rij $(x_0, t^{\varepsilon_1}, x_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, x_n)$ wordt cyclisch gereduceerd genoemd als ze gereduceerd is, en als in het geval $n \geq 1$ de rij $(t^{\varepsilon_n}, x_n x_0, t^{\varepsilon_1})$ niet van de vorm (t^{-1}, a, t) of (t, b, t^{-1}) is, met $a \in A$ en $b \in B$. Een element $x \in G *_\phi$ is cyclisch gereduceerd als x het product is van de elementen van een cyclisch gereduceerde rij.

Beschouwen we een cyclisch gereduceerd element x van lengte $n \geq 1$, dan toont men zoals in de voorgaande sectie aan dat de lengte van x^m gelijk is aan mn , voor elke $m \in \mathbb{N}$.

Lemma 2.2.16. *Elke $x \in G *_\phi$ is toegevoegd aan een cyclisch gereduceerd element.*

Bewijs. Per inductie op de lengte n van x . Als $n \leq 1$, dan is x een cyclisch gereduceerd element. Zij dus $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 \cdots t^{\varepsilon_n} x_n$ met $n \geq 2$, en onderstel dat x niet cyclisch gereduceerd is. Omdat de normaalvorm van x gereduceerd is, moet de rij $(t^{\varepsilon_n}, x_n x_0, t^{\varepsilon_1})$ van de vorm (t^{-1}, a, t) of (t, b, t^{-1}) zijn. Onderstel dat ze van de vorm (t^{-1}, a, t) is. Het andere geval gaat analoog. Beschouw dan

$$(t^{\varepsilon_n} x_n) x (t^{\varepsilon_n} x_n)^{-1} = t^{\varepsilon_n} x_n x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 \cdots t^{\varepsilon_{n-1}} x_{n-1} = \phi(a) x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_{n-1}} x_{n-1}$$

Deze laatste uitdrukking heeft lengte $n - 2$, en is dus toegevoegd aan een cyclisch gereduceerd element. Bijgevolg is ook x toegevoegd aan een cyclisch gereduceerd element. $\square$

Een HNN-extensie is altijd een oneindige groep door gevolg 2.2.8. De volgende stelling zegt dat we ook een eindige groep kunnen construeren die G bevat en waarin A en B toegevoegd zijn aan elkaar. Deze stelling vormt het analogon van stelling 2.1.18 binnen de context van HNN-extensies. Het bewijs hiervan is overgenomen uit [16, Sectie 18].

Stelling 2.2.17. *Als G eindig is, dan bestaat een morfisme $\psi : G*_\phi \rightarrow S$, met S een eindige groep en zodat ψ injectief is op G .*

Bewijs. Definieer

$$\psi : G \rightarrow \text{Sym}(G) : g^* \mapsto [g \mapsto g^*g]$$

Men gaat na dat ψ een monomorfisme is. Omdat G eindig is en A en B isomorf zijn moet gelden dat $[G : A] = [G : B]$. Zij $\sigma : T_A \rightarrow T_B$ een bijectie. We definiëren $\pi \in \text{Sym}(G)$ door

$$\pi(g_0g_1) = \phi(g_0)\sigma(g_1), \quad (g_0 \in A, g_1 \in T_A)$$

De inverse van π wordt gegeven door

$$\pi^{-1}(g_0g_1) = \phi^{-1}(g_0)\sigma^{-1}(g_1), \quad (g_0 \in B, g_1 \in T_B)$$

We berekenen

$$\begin{aligned} \pi\psi(a)\pi^{-1}(g_0g_1) &= \pi\psi(a)(\phi^{-1}(g_0)\sigma^{-1}(g_1)) \\ &= \pi(a\phi^{-1}(g_0)\sigma^{-1}(g_1)) \\ &= \phi(a)g_0g_1 \end{aligned}$$

wat overeenkomt met $\psi(\phi(a))(g_0g_1)$. Uit lemma 2.2.11 volgt het bestaan van een unieke uitbreiding $\Psi : G*_\phi \rightarrow \text{Sym}(G)$ zodat $\Psi(g) = \psi(g)$ voor alle $g \in G$ en $\Psi(t) = \pi^{-1}$. De injectiviteit van Ψ op G wordt dan overgeërfd van de injectiviteit van ψ . $\square$

Hoofdstuk III

Bass-Serre-theorie

3.1 Inleidende definities

Definitie 3.1.1. Een graaf Γ bestaat uit een verzameling toppen $V(\Gamma)$, een verzameling bogen $E(\Gamma) \subseteq V(\Gamma) \times V(\Gamma)$, en afbeeldingen

$$E \rightarrow E : e \mapsto \bar{e}$$

$$E \rightarrow V : e \mapsto \alpha(e)$$

$$E \rightarrow V : e \mapsto \omega(e)$$

die voldoen aan $\bar{\bar{e}} = e$, $\bar{e} \neq e$ en $\alpha(\bar{e}) = \omega(e)$.

Merk op dat met deze definitie een graaf overeenkomt met wat in de literatuur vaak een multigraaf wordt genoemd. Dit betekent dat een graaf Γ zelflussen $e \in E(\Gamma)$ kan hebben waarvoor $\alpha(e) = \omega(e)$. Ook kunnen er zogenaamde multi-bogen bestaan. Dit zijn twee verschillende bogen $e_1, e_2 \in E(\Gamma)$ met dezelfde eindpunten: $\alpha(e_1) = \alpha(e_2)$ en $\omega(e_1) = \omega(e_2)$. We zullen vaak spreken over het toevoegen of verwijderen van een boog e . Hiermee bedoelen we dat we deze operatie uitvoeren voor zowel e als zijn inverse $\bar{e}$.

Een pad in een graaf Γ stellen we voor als een tuple $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$. Hierbij is $v_i \in V(\Gamma)$ voor $0 \leq i \leq n$ en $e_i \in E(\Gamma)$ voor $1 \leq i \leq n$, met $\alpha(e_i) = v_{i-1}$ en $\omega(e_i) = v_i$. Een pad noemen we lokaal injectief als $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$ voor $1 \leq i < n$. We noemen het pad injectief als de toppen $\{v_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ onderling verschillend zijn. Merk op dat een injectief pad ook lokaal injectief is. Met een cykel bedoelen we een lokaal injectief pad waarvoor het begin- en eindpunt samenvallen, i.e. $v_0 = v_n$, en waarvoor $e_0 \neq \bar{e}_n$. Een injectieve cykel is een cykel die een injectief pad is als we de laatste top niet meerekenen. Als een cykel niet injectief is, dan kunnen we altijd een injectieve deelcykel beschouwen die start en eindigt in een top die herhaald wordt. We definiëren een boom als een graaf die samenhangend is en geen cyclen bevat. In het bijzonder heeft een boom geen zelflussen en multi-bogen.

De volgende definitie van de contractie van een graaf ten opzichte van een zekere deelgraaf is overgenomen uit [1]. Intuïtief kan men dit zien als het samentrekken van deze deelgraaf tot een punt.

Definitie 3.1.2. Zij Γ een graaf en $\Delta \subseteq \Gamma$ een deelgraaf. Zij $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ de verzameling van samenhangende componenten van Δ . Kies voor elke $i \in I$ een top $w_i \in V(\Delta_i)$. We definiëren de contractie van Δ in Γ als de graaf Γ/Δ met

$$V(\Gamma/\Delta) = \{\tilde{v} \mid v \in V(\Gamma) \setminus V(\Delta)\} \cup \{\tilde{w}_i \mid i \in I\}$$

$$E(\Gamma/\Delta) = \{\tilde{e} \mid e \in E(\Gamma) \setminus E(\Delta)\}$$

waarbij $\tilde{e} = \tilde{e}$, en

$$\alpha(\tilde{e}) = \begin{cases} \widetilde{\alpha(e)} & \alpha(e) \notin V(\Delta) \\ \tilde{w}_i & \alpha(e) \in V(\Delta_i) \end{cases}$$

$$\omega(\tilde{e}) = \begin{cases} \widetilde{\omega(e)} & \omega(e) \notin V(\Delta) \\ \tilde{w}_i & \omega(e) \in V(\Delta_i) \end{cases}$$

Men gaat na dat Γ/Δ voldoet aan de eigenschappen van definitie 3.1.1, en dus inderdaad een graaf is. Het volgende lemma zal later van pas komen.

Lemma 3.1.3. *Zij Γ een graaf en $\Delta \subseteq \Gamma$ een deelboom. Dan is Γ een boom als en slechts als Γ/Δ een boom is.*

Bewijs. Als Δ ledig is, dan ziet men dat $\Gamma/\Delta \cong \Gamma$, waaruit het gestelde volgt. We mogen dus onderstellen dat Δ niet-ledig is. Merk op dat de verzameling $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ uit de voorgaande definitie enkel Δ zelf bevat. Zij $\tilde{w}$ de top die met Δ correspondeert in Γ/Δ .

Onderstel eerst dat Γ een boom is, en zij $v \in V(\Gamma) \setminus V(\Delta)$ willekeurig. Door een pad in Γ te beschouwen van v naar w ziet men makkelijk dat ook een pad van $\tilde{v}$ naar $\tilde{w}$ bestaat in Γ/Δ . De samenhangendheid van Γ/Δ volgt dan omdat elke top van Γ/Δ verbonden is met $\tilde{w}$ door een pad. Onderstel vervolgens dat Γ/Δ een cykel zou bevatten. Als deze cykel niet door $\tilde{w}$ gaat, dan vertalen we dit makkelijk naar een cykel in Γ , waaruit een contradictie volgt. Stel dus dat de cykel wel door $\tilde{w}$ gaat. We mogen onderstellen dat de cykel injectief is, zodat ze slechts één keer door $\tilde{w}$ gaat. We kunnen nu de cykel voorstellen als $(\tilde{w}, \tilde{e}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{e}_n, \tilde{w})$, waarbij $v_i \in V(\Gamma) \setminus V(\Delta)$ voor $1 \leq i < n$. Nu moet $\alpha(e_1), \omega(e_n) \in V(\Delta)$. Zij $(w_0, r_1, w_1, \dots, r_m, w_m)$ een injectief pad in de boom Δ met $w_0 = \alpha(e_1)$ en $w_m = \omega(e_n)$. Dan gaat men na dat

$$(w_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, w_m, r_m, w_{m-1}, \dots, r_1, w_0)$$

een cykel is in Γ . Met deze contradictie besluiten we dat Γ/Δ een boom is.

Stel nu omgekeerd dat Γ/Δ een boom is. We tonen eerst aan dat Γ samenhangend is. Zij hiervoor $v_0, v'_0 \in V(\Gamma)$ willekeurig. Als $v_0, v'_0 \in V(\Delta)$, dan bestaat een pad van v_0 naar v'_0 in Δ , en dus ook in Γ . Als bijvoorbeeld $v_0 \notin V(\Delta)$ en $v'_0 \in V(\Delta)$, dan vinden we in Γ/Δ een pad van $\tilde{v}_0$ naar $\tilde{w}$, stel $(\tilde{v}_0, \tilde{e}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{n-1}, \tilde{e}_n, \tilde{w})$. We mogen onderstellen dat $\tilde{v}_i \neq \tilde{w}$ voor $0 \leq i < n$, anders zou er een korter pad bestaan. Dan is $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ een pad in Γ , waarbij $v_n = \omega(e_n) \in \Delta$. Door dit pad samen te voegen met een pad in Δ dat de toppen v_n en v'_0 verbindt, krijgen we een pad in Γ van v_0 naar v'_0 . Zij nu $v_0, v'_0 \notin V(\Delta)$. Uit het voorgaande volgt dat zowel v_0 als v'_0 verbonden zijn met $w \in V(\Delta)$ door een pad. Bijgevolg zijn ook v_0 en v'_0 verbonden door een pad.

Onderstel tenslotte voor een contradictie dat Γ een cykel $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ bevat, met $v_n = v_0$. We mogen onderstellen dat deze cykel injectief is. Omdat Δ geen cycli bevat is er minstens één top in de cykel die niet in $V(\Delta)$ is bevat. Stel zonder verlies van algemeenheid dat deze top v_0 is. Anderzijds moet de cykel door Δ gaan, want anders is $(\tilde{v}_0, \tilde{e}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{e}_n, \tilde{v}_n)$ een cykel in Γ/Δ . Beschouw nu de eerste en laatste toppen in de cykel die in Δ zijn bevat. Noem deze respectievelijk v_i en v_j . We gaan na dat

$$(\tilde{v}_0, \tilde{e}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{i-1}, \tilde{e}_i, \tilde{w}, \tilde{e}_{j+1}, \tilde{v}_{j+1}, \dots, \tilde{e}_n, \tilde{v}_n)$$

een cykel is in Γ/Δ . Hiervoor volstaat het in te zien dat $\tilde{e}_{j+1} \neq \tilde{e}_i$. Stel dus $\tilde{e}_{j+1} = \tilde{e}_i$. Dan is ook $e_{j+1} = \bar{e}_i$. Omdat $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ een cykel is moet $i \neq j$. Maar uit de injectiviteit van de cykel volgt $v_i \neq v_j$, en opnieuw is het duidelijk dat $e_{j+1} = \bar{e}_i$ niet kan. We vinden dus een cykel in Γ/Δ , wat tot een contradictie leidt aangezien Γ/Δ een boom is. We besluiten dat Γ een boom moet zijn. $\square$

Opmerking 3.1.4. Voor de eenvoud hebben we in het voorgaande lemma verondersteld dat Δ een enkele boom is. Men kan dit lemma ook bewijzen in het geval dat Δ bestaat uit meerdere deelbomen van Γ (zelfs oneindig veel). Het bewijs gaat volledig analoog. In het bijzonder gaat elke cykel in Γ door slechts een eindig aantal bomen van Δ , en we kunnen opnieuw onderstellen dat ze hoogstens één keer door elke boom gaat.

Definitie 3.1.5. Zij Γ, Δ grafen. Een graafmorfisme van Γ naar Δ is een afbeelding

$$f : V(\Gamma) \cup E(\Gamma) \rightarrow V(\Delta) \cup E(\Delta)$$

met $f(V(\Gamma)) \subseteq V(\Delta)$, $f(E(\Gamma)) \subseteq E(\Delta)$, en

$$f(\alpha_V(e)) = \alpha_W(f(e)) \quad f(\omega_V(e)) = \omega_W(f(e)) \quad f(\bar{e}^V) = \overline{f(e)}^W$$

Een automorfisme van de graaf Γ is een bijectief morfisme van Γ naar zichzelf. De automorfismengroep van Γ , genoteerd $\text{Aut}(\Gamma)$, is de groep bestaande uit alle automorfismen van Γ uitgerust met de compositie als groepsbewerking.

Definitie 3.1.6. Zij G een groep en Γ een graaf. Een actie van G op Γ is een groeps-morfisme

$$\phi : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$$

We zeggen ook dat de groep G werkt op de graaf Γ , en noteren dit als $G \curvearrowright \Gamma$. De groep G werkt zonder inversie op Γ als geen enkel niet-triviaal element van G een boog van Γ invertteert. Als G zonder inversie werkt, en als bovendien geen enkel element van G een top of boog van Γ fixeert, dan zeggen we dat G vrij werkt.

We nemen in het vervolg aan dat de gewoonlijke definities en eigenschappen van acties van groepen gekend zijn. We noteren de baan onder de actie van G van een top $v \in V(\Gamma)$ en een boog $e \in E(\Gamma)$ respectievelijk als $[v]$ en $[e]$. Als Δ een deelgraaf is van Γ , dan noteren we ook $[\Delta]$ voor de verzameling $\{[x] \mid x \in V(\Delta) \cup E(\Delta)\}$.

Definitie 3.1.7. Zij G een groep die zonder inversie werkt op een graaf Γ . We definiëren de quotiëntgraaf Γ/G als

$$\begin{aligned} V(\Gamma/G) &= \{[v] \mid v \in V(\Gamma)\} \\ E(\Gamma/G) &= \{[e] \mid e \in E(\Gamma)\} \end{aligned}$$

waarbij $\overline{[e]} = [\bar{e}]$, $\alpha([e]) = [\alpha(e)]$ en $\omega([e]) = [\omega(e)]$.

Men gaat makkelijk na dat de quotiëntgraaf goed gedefinieerd is en aan de eigenschappen van definitie 3.1.1 voldoet. Merk op dat de eigenschap dat G zonder inversie werkt garandeert dat $\overline{[e]} \neq [e]$. Merk eveneens op dat de afbeelding $\Gamma \rightarrow \Gamma/G : x \mapsto [x]$ per definitie een graafmorfisme is.

Definitie 3.1.8. Zij G een groep die zonder inversie werkt op een graaf Γ . Zij $\Delta \subseteq \Gamma/G$ een deelgraaf. Een lift van Δ is een deelverzameling¹ $\tilde{\Delta} \subseteq \Gamma$ waarvoor de restrictie van de afbeelding $\Gamma \rightarrow \Gamma/G : x \mapsto [x]$ tot de verzameling $\tilde{\Delta}$ een bijectie $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ induceert. Een samenhangende lift van Δ is een lift van Δ die samenhangend is. Een fundamenteaalgebied van Δ is een lift $\tilde{\Delta}$ van Δ waarvoor de restrictie van $x \mapsto [x]$ tot $\tilde{\Delta}$ een isomorfisme is.

Het is duidelijk dat elke deelgraaf van Γ/G altijd een lift heeft in Γ . Merk op dat indien deze lift een deelgraaf is van Γ , het automatisch een fundamenteaalgebied is. Het volgende lemma geeft een voldoende voorwaarde om een fundamenteaalgebied van een deelgraaf van Γ/G in Γ te kunnen vinden.

Lemma 3.1.9. *Zij G een groep die zonder inversie werkt op een graaf Γ . Als $\Delta \subseteq \Gamma/G$ een boom is, dan bestaat een fundamenteaalgebied van Δ in Γ .*

Bewijs. Zij Ω de verzameling van deelbomen van Γ die ingebed worden in Δ door het morfisme $x \mapsto [x]$. We ordenen Ω door inclusie. Elke keten van Ω heeft een bovengrens, namelijk de unie van de elementen in de keten. Door het Lemma van Zorn vinden we dus een maximaal element $\tilde{\Delta} \in \Omega$. We tonen aan dat $[\tilde{\Delta}] = \Delta$. Onderstel dat $[\tilde{\Delta}] \subsetneq \Delta$ zou gelden. Omdat $\tilde{\Delta}$ samenhangend is bestaat $[e] \in E(\Delta) \setminus E([\tilde{\Delta}])$ zodat $[\alpha(e)] = \alpha([e]) \in V([\tilde{\Delta}])$. Omdat $[\tilde{\Delta}]$ een deelboom is van Δ moet $[\omega(e)] = \omega([e]) \notin V([\tilde{\Delta}])$, anders zou dit een cykel opleveren in Δ . Dan is $g \cdot e \notin E(\tilde{\Delta})$ en $\omega(g \cdot e) = g \cdot \omega(e) \notin V(\tilde{\Delta})$ voor elke $g \in G$. Nu kunnen we $g \in G$ kiezen zodat $\alpha(g \cdot e) = g \cdot \alpha(e) \in V(\tilde{\Delta})$. Zij $\tilde{\Delta}'$ de graaf bekomen uit $\tilde{\Delta}$ door de boog $g \cdot e$ toe te voegen, samen met zijn eindtop $\omega(g \cdot e) = g \cdot \omega(e)$. Dan is $\tilde{\Delta}' \in \Omega$, wat een strijdigheid levert door de maximaliteit van $\tilde{\Delta}$. $\square$

3.2 Boomproducten

In deze sectie introduceren we het begrip boomproduct, wat een veralgemening is van een geamalgameerd product. Het idee van een boomproduct is dat we een universele groep construeren die verschillende groepen bevat, waarbij bepaalde deelgroepen van twee van deze groepen geïdentificeerd worden naargelang gegeven isomorfismen. We zullen hiervoor een graaf beschouwen met aan elke top een groep toegekend, en waarbij een boog van de graaf een isomorfisme beschrijft tussen twee deelgroepen van zijn eindtoppen.

Definitie 3.2.1. Zij Γ een graaf. Een groepsgraaf-structuur op Γ is een afbeelding

$$\Phi : \begin{cases} v \mapsto G_v & (v \in V(\Gamma)) \\ e \mapsto \phi_e & (e \in E(\Gamma)) \end{cases}$$

die de toppen van Γ afbeeldt op groepen, en de bogen van Γ op isomorfismen tussen twee groepen. Meer bepaald is $\phi_e : A_e \rightarrow B_e$ is een isomorfisme tussen deelgroepen $A_e \leq G_{\alpha(e)}$ en $B_e \leq G_{\omega(e)}$. We leggen bovendien de voorwaarde op dat $\phi_{\bar{e}} = \phi_e^{-1}$ voor elke boog e .

Definitie 3.2.2. Zij Γ een eindige niet-ledige boom, en zij Φ een groepsgraaf-structuur op Γ . We nemen de notaties uit de voorgaande definitie aan. Onderstel dat

$$G_v = \langle S_v \mid R_v \rangle \quad (\forall v \in V(\Gamma))$$

¹ Met een deelverzameling van een graaf Γ bedoelen we een deelverzameling van $V(\Gamma) \cup E(\Gamma)$. Men kan zo een verzameling als een graaf zien waarbij op sommige bogen eindtoppen kunnen ontbreken. Eveneens zullen we een afbeelding f tussen twee grafen Γ en Δ vaak noteren als $f : \Gamma \rightarrow \Delta$ in plaats van $f : V(\Gamma) \cup E(\Gamma) \rightarrow V(\Delta) \cup E(\Delta)$.

waarbij $S_v = \{g_{vi} \mid i \in I_v\}$ onderling disjunct zijn voor elke $v \in V(\Gamma)$. Het boomproduct van de groepen $\{G_v \mid v \in V(\Gamma)\}$ met betrekking tot de isomorfismen $\{\phi_e \mid e \in E(\Gamma)\}$ is de groep

$$*_\Phi G_v := \left\langle \bigcup_{v \in V(\Gamma)} S_v \mid \bigcup_{v \in V(\Gamma)} R_v, \bigcup_{e \in E(\Gamma)} R_e \right\rangle$$

waarbij $R_e = \{a_e(g_{\alpha(e),i}) = \phi_e(a_e)(g_{\omega(e),j}) \mid a_e \in A_e\}$ voor elke $e \in E(\Gamma)$.

Opmerking 3.2.3. Het concept van een boomproduct dat we in deze tekst definiëren wordt in de literatuur vaak algemener behandeld. Zo kan een boomproduct bijvoorbeeld worden opgevat als een specifiek geval van een directe limiet van groepen, wat gedefinieerd wordt in [20]. Meestal worden in de literatuur ook boomproducten beschouwd waarin de graaf Γ oneindig is. In het tweedelige werk [17] en [18] worden zogenaamde ‘veralgemeende geamalgameerde producten’ beschouwd, waarin Γ niet noodzakelijk een boom hoeft te zijn. In het algemeen is er dan geen zekerheid meer dat de groepen G_v ingebed zijn in dit veralgemeend geamalgameerd product. Bovendien kunnen cyclische verbanden tussen de relaties ervoor zorgen dat de intersectie van twee groepen G_v en G_w groter wordt dan de groep A_e , waarbij de boog e de toppen v en w verbindt. Deze condities worden daarom expliciet toegevoegd aan de definitie van het veralgemeend geamalgameerd product. Voor de specifieke doeleinden van deze tekst zullen we deze veralgemeningen niet van groot belang zijn. We zullen echter wel geïnteresseerd zijn in een ander soort veralgemening, namelijk het concept van een fundamentele groep, wat we introduceren in de volgende sectie. Het feit dat we Γ eindig onderstellen brengt ook wat beperkingen met zich mee. Bepaalde resultaten zoals stelling 3.5.6 of gevolg 4.1.17 verderop in deze tekst kan men bijvoorbeeld bewijzen met Bass-Serre-theorie, maar in deze bewijzen is het van cruciaal belang dat de graaf Γ oneindig groot mag zijn. Een boomproduct of een fundamentele groep waarbij Γ een oneindige graaf is zullen we voortaan respectievelijk een ‘veralgemeend boomproduct’ en een ‘veralgemeende fundamentele groep’ noemen. De presentatie van veralgemeende boomproducten en veralgemeende fundamentele groepen is dezelfde als deze van hun eindige tegenhangers. Wanneer Γ echter oneindig is vraagt lemma 3.2.4 wat meer werk om aan te tonen. We zullen in het bewijs van dit lemma namelijk steunen op het feit dat we een inductief argument kunnen toepassen op de grootte van Γ . We komen hier in hoofdstuk 5 nog op terug.

Doorheen deze sectie behouden we de notaties in definitie 3.2.2. We gaan dus telkens uit van een eindige niet-ledige boom Γ , samen met een groepsgraaf-structuur

$$\Phi : \begin{cases} v \mapsto G_v & (v \in V(\Gamma)) \\ e \mapsto \phi_e & (e \in E(\Gamma)) \end{cases}$$

De substitutietest geeft opnieuw aanleiding tot canonische morfismen, die we noteren met $G_v \rightarrow *_\Phi G_v : g \rightarrow g'$. De lemma’s die we in deze sectie bewijzen zijn gebaseerd op [12, Stelling 1], en vormen verdere uitwerkingen ervan. Deze lemma’s zijn bedoeld om de lezer vertrouwd te maken met boomproducten. Hiermee zullen we een vlotte overgang kunnen maken naar de volgende sectie, waarin we dezelfde eigenschappen voor fundamentele groepen bewijzen.

Lemma 3.2.4.

1. De canonische morfismen $G_v \rightarrow *_\Phi G_v$ zijn injectief, en bijgevolg kan iedere groep G_v gezien worden als deelgroep van $*_\Phi G_v$.

2. Zij Δ een niet-ledige deelboom van Γ , en $\Psi = \Phi|_{\Delta}$ de restrictie van Φ tot Δ . Het canonische morfisme $*_{\Psi} G_v \rightarrow *_{\Phi} G_v$ is goed gedefinieerd en injectief. Bijgevolg kan elk boomproduct corresponderend met een deelboom van Γ gezien worden als deelgroep van het volledige boomproduct.
3. Zij gegeven een groep G met een deelgroep $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme met $A \leq G_v$ voor een zekere $v \in V(\Gamma)$. Zij Γ' de boom die uit Γ bekomen wordt door het toevoegen van een boog e en een top w met $\alpha(e) = v$ en $\omega(e) = w$. Zij Φ' de uitbreiding van Φ tot een afbeelding met domein Γ' , waarvoor $\Phi'(e) = \phi$, $\Phi'(\bar{e}) = \phi^{-1}$ en $\Phi'(w) = G$. Het canonische morfisme $*_{\Phi'} G_v \rightarrow (*_{\Phi} G_v) *_{\phi} G$ is een isomorfisme.

Bewijs. Merk op dat het laatste punt pas zinvol is eens we het eerste aantonen, aangezien we dan ϕ kunnen vertalen naar een isomorfisme startend vanuit een deelgroep van $*_{\Phi} G_v$. We bewijzen daarom alle delen van het lemma simultaan, per inductie op de grootte $|V(\Gamma)|$ van de boom. Eens het eerste punt is aangetoond voor een zekere waarde van $|V(\Gamma)|$, dan wordt het canonische morfisme vermeld in het derde punt gerechtvaardigd door in te zien dat elke relatie $b(g_i) = \phi^{-1}(b)(g_{vj})$ van het boomproduct overeenkomt met een relatie $a(g_{vi}) = \phi(a)(g_j)$. Door stelling 2.1.5 en opmerking 2.1.6 kunnen we de presentatie van $(*_{\Phi} G_v) *_{\phi} G$ laten overeenkomen met die van $*_{\Phi'} G_v$. Hieruit volgt dan de inductiestap voor het derde punt.

Uit het voorgaande volstaat het de eerste twee punten van het lemma per inductie aan te tonen, waarbij we in de inductiehypothese mogen gebruik maken van het derde punt. Merk nu op dat het eerste punt een specifiek geval is van het tweede door Δ gelijk te stellen aan een top van Γ . Zij dus Δ en Ψ zoals in het tweede deel van het lemma. Als $|V(\Gamma)| = 1$, dan is $\{G_v \mid v \in V(\Gamma)\} = \{G\}$ voor een zekere groep G , en moet $*_{\Psi} G_v = *_{\Phi} G_v = G$. Onderstel nu dat $|V(\Gamma)| \geq 2$. In het geval $\Delta = \Gamma$ is het gestelde duidelijk. Onderstel dus eveneens dat $\Delta \subsetneq \Gamma$. Dan vinden we een $w \in V(\Gamma) \setminus V(\Delta)$ die verbonden is met juist één $v \in V(\Gamma)$, stel door $e \in E(\Gamma)$. Met andere woorden, w is een blad van de boom Γ dat niet in Δ is bevat. Om de inductiehypothese toe te passen beschouwen we de boom Γ' die bekomen wordt uit Γ door de boog e en zijn eindtop w te verwijderen. Zij $\Phi' = \Phi|_{\Gamma'}$. Uit het derde punt weten we dat het canonische morfisme $\theta_1 : *_{\Phi} G_v \rightarrow (*_{\Phi'} G_v) *_{\phi_e} G_w$ een isomorfisme is. Verder volgt uit de eigenschappen van het geamalgameerd product en de inductiehypothese dat de canonische morfismen

$$\begin{aligned}\theta_2 : *_{\Phi'} G_v &\rightarrow (*_{\Phi'} G_v) *_{\phi_e} G_w \\ \theta_3 : *_{\Psi} G_v &\rightarrow *_{\Phi'} G_v\end{aligned}$$

injectief zijn. Nu zien we dat $\theta_1^{-1} \circ \theta_2 \circ \theta_3$ de unieke uitbreiding is van de functie θ die de generatoren van $*_{\Psi} G_v$ afbeeldt op de corresponderende generatoren van $*_{\Phi} G_v$. Het canonische morfisme $*_{\Psi} G_v \rightarrow *_{\Phi} G_v$ is dus gelijk aan $\theta_1^{-1} \circ \theta_2 \circ \theta_3$, hetgeen injectief is. Dit vervolledigt de inductiestap voor het tweede punt. $\square$

Uit de gekende eigenschappen van het geamalgameerd product kunnen we aantonen dat de groepen G_v , gezien als deelgroepen van het boomproduct, met elkaar samenvallen waar we verwachten.

Gevolg 3.2.5. Voor elke $e \in E(\Gamma)$ geldt dat $G'_{\alpha(e)} \cap G'_{\omega(e)} = A'_e = B'_e$ in $*_{\Phi} G_v$.

Bewijs. Zij $e \in E(\Gamma)$ willekeurig. Noteer $v = \alpha(e)$ en $w = \omega(e)$. Beschouw nu de deelboom $\Delta \subseteq \Gamma$ bestaande uit v , w en e . Stel $\Psi = \Phi|_{\Delta}$. Uit het derde punt van lemma 3.2.4 weten we dat er een canonisch isomorfisme $*_{\Psi} G_v \rightarrow G_v *_{\phi_e} G_w$ bestaat. Verder volgt uit het

tweede punt van lemma 3.2.4 dat $*_{\Psi} G_v$ canonisch ingebed is in $*_{\Phi} G_v$. De canonische morfismen $G_v \rightarrow *_{\Phi} G_v$ en $G_w \rightarrow *_{\Phi} G_v$ worden dan bekomen door respectievelijk de bovenste en onderste tak van het volgend diagram van links naar rechts te doorlopen

$$\begin{array}{ccccccc} G_v & \searrow & & & & & \\ & & G_v *_{\phi_e} G_w & \longrightarrow & *_{\Psi} G_v & \longrightarrow & *_{\Phi} G_v \\ G_w & \nearrow & & & & & \end{array}$$

Aangezien de laatste twee morfismen injectief zijn volstaat het aan te tonen dat $G'_v \cap G'_w = A'_e = B'_e$ geldt in $G_v *_{\phi_e} G_w$. Maar dit volgt uit de eigenschappen van het geamalgameerd product. $\square$

Uit lemma 3.2.4 volgt dat we elk boomproduct inductief kunnen opbouwen door geamalgameerde producten te nemen. Merk op dat de volgorde waarin we dit doen niet uitmaakt, het resultaat is uniek bepaald op een isomorfisme na dat canonisch is. We zullen dit argument toepassen om het volgende lemma aan te tonen. Intuïtief komt dit lemma neer op het feit dat het boomproduct van Γ onveranderd blijft indien we een deelboom Δ van Γ samentrekken en de nieuwe top laten corresponderen met het boomproduct corresponderend met Δ .

Lemma 3.2.6. *Zij Δ een niet-ledige deelboom van Γ , en zij Γ/Δ de contractie van Δ in Γ , met $w \in V(\Delta)$ een vast gekozen top zoals in definitie 3.1.2. Definieer $\Psi = \Phi|_{\Delta}$, en zij $*_{\Psi} G_v$ het boomproduct corresponderend met Δ . Definieer verder een groepsgraafstructuur op Γ/Δ door*

$$\tilde{\Phi} : \begin{cases} \tilde{v} \mapsto G_{\tilde{v}} := G_v & (v \in V(\Gamma) \setminus V(\Delta)) \\ \tilde{w} \mapsto G_{\tilde{w}} := *_{\Psi} G_v \\ \tilde{e} \mapsto \phi_{\tilde{e}} \end{cases}$$

waarbij het isomorfisme $\phi_{\tilde{e}}$ gedefinieerd is door het commutatieve diagram

$$\begin{array}{ccccccc} G_{\alpha(e)} & \xleftarrow{\geq} & A_e & \xrightarrow{\phi_e} & B_e & \xleftarrow{\leq} & G_{\omega(e)} \\ \downarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \downarrow \\ G_{\widetilde{\alpha(e)}} & \xleftarrow{\geq} & A_e & \xrightarrow{\phi_{\tilde{e}}} & B_e & \xleftarrow{\leq} & G_{\widetilde{\omega(e)}} \end{array}$$

We nemen in bovenstaand diagram de conventie aan dat $\tilde{v} = \tilde{w}$ voor elke $v \in V(\Delta)$. Met deze conventie is G_v canonisch ingebed $G_{\tilde{v}}$ voor elke $v \in V(\Gamma)$. Met de bovenstaande definities bestaat een canonisch isomorfisme

$$*_{\Phi} G_v \rightarrow *_{\tilde{\Phi}} G_{\tilde{v}} \tag{3.1}$$

Bewijs. Per inductie op $|V(\Gamma)|$. Als $\Delta = \Gamma$, dan zijn beide leden van vergelijking (3.1) gelijk aan $*_{\Psi} G_v$ en is het gestelde triviaal. Hieruit volgt alvast het geval $|V(\Gamma)| = 1$. Onderstel dus dat $|V(\Gamma)| \geq 2$ en dat $\Delta \subsetneq \Gamma$. Dan vinden we zoals in voorgaand lemma een blad $v' \in V(\Gamma) \setminus V(\Delta)$. Zij $e \in E(\Gamma)$ de unieke boog met $\omega(e) = v'$, en stel $\alpha(e) = v$. We passen nu de inductiehypothese toe op de boom Γ' die uit Γ bekomen wordt door de boog e samen met de top v' te verwijderen. Zij daarvoor $\Phi' = \Phi|_{\Gamma'}$, en definieer $\tilde{\Phi}'$

zoals in de opgave. Merk op dat $\tilde{\Phi}'$ de restrictie is van $\tilde{\Phi}$ op de deelgraaf $(\Gamma/\Delta)'$ van Γ/Δ bekomen door $\tilde{e}$ en $\tilde{v}'$ te verwijderen. Door het derde punt van lemma 3.2.4 hebben we dus canonische isomorfismen

$$\begin{aligned} *_{\Phi} G_v &\rightarrow *_{\Phi'} G_v *_{\phi_e} G_{v'} \\ *_{\tilde{\Phi}} G_{\tilde{v}} &\rightarrow *_{\tilde{\Phi}'} G_{\tilde{v}} *_{\phi_{\tilde{e}}} G_{\tilde{v}'} \end{aligned}$$

Bovendien vinden we uit de inductiehypothese een canonisch isomorfisme

$$\psi : *_{\Phi'} G_v \rightarrow *_{\tilde{\Phi}'} G_{\tilde{v}}$$

We willen nu stelling 2.1.5 toepassen, waaruit een isomorfisme

$$(*_{\Phi'} G_v) *_{\phi_e} G_{v'} \rightarrow (*_{\tilde{\Phi}'} G_{\tilde{v}}) *_{\phi_{\tilde{e}}} G_{\tilde{v}'}$$

zou volgen dat eveneens corresponderende generatoren op elkaar afbeeldt (zie ook opmerking 2.1.6). De inductiestap volgt dan door de drie laatste isomorfismen te combineren tot een canonisch isomorfisme

$$*_{\Phi} G_v \rightarrow *_{\tilde{\Phi}} G_{\tilde{v}}$$

We moeten nog aantonen dat de voorwaarden van stelling 2.1.5 voldaan zijn. In de context van dit bewijs komt dit neer op aantonen dat het diagram

$$\begin{array}{ccccccc} & & *_{\Phi'} G_v & \xleftarrow{\geq} & A_e & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & \searrow \phi_e & \\ & & G_v & \xleftarrow{\geq} & A_e & \xrightarrow{\phi_e} & B_e \xrightarrow{\leq} G_{v'} \\ & \psi \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ & & G_{\tilde{v}} & \xleftarrow{\geq} & A_e & \xrightarrow{\phi_{\tilde{e}}} & B_e \xrightarrow{\leq} G_{\tilde{v}'} \\ & & \downarrow & & \downarrow & \nearrow \phi_{\tilde{e}} & \\ & & *_{\tilde{\Phi}'} G_{\tilde{v}} & \xleftarrow{\geq} & A_e & & \end{array}$$

commuteert. De groepen aan de linkerkant van het diagram bevatten elk een deelgroep die correspondeert met A_e . We blijven de notatie A_e aannemen voor elk van deze deelgroepen, aangezien de context duidelijk is. Hetzelfde geldt voor de deelgroepen corresponderend met B_e aan de rechterkant. Merk op dat het bovenste deel van het diagram automatisch commuteert, omdat het morfisme ϕ_e bovenaan een lift is van het originele morfisme ϕ_e eronder. Hetzelfde geldt voor het onderste deel van het diagram. Het deel in het midden commuteert per definitie van $\phi_{\tilde{e}}$. We moeten dus enkel aantonen dat het morfisme ψ compatibel is met de rest van het diagram. Maar dit volgt omdat de linkerzijde van het diagram uitsluitend uit canonische morfismen bestaat, en dus commuteert. $\square$

3.3 Fundamentele groepen

Definitie 3.3.1. Zij Γ een eindige niet-ledige samenhangende graaf met een eindig aantal bogen, en zij T een maximale deelboom van Γ . Zij Φ een groepsgraaf-structuur op Γ , waarbij we de gewoonlijke notaties aannemen. Onderstel dat

$$G_v = \langle S_v \mid R_v \rangle \quad (\forall v \in V(\Gamma))$$

waarbij $S_v = \{g_{vi} \mid i \in I_v\}$ onderling disjunct zijn voor elke $v \in V(\Gamma)$. Zij

$$\ast_{\Phi|_T} G_v = \langle S_T \mid R_T \rangle$$

het boomproduct corresponderend met T . De fundamentele groep van $\{G_v \mid v \in V(\Gamma)\}$ met betrekking tot $\{\phi_e \mid e \in E(\Gamma)\}$ en T is de groep

$$\ast_{\Phi}^T G_v := \left\langle S_T, \{t_e \mid e \notin E(T)\} \mid R_T, \bigcup_{e \notin E(T)} R_e, \{t_e t_{\bar{e}} = 1 \mid e \notin E(T)\} \right\rangle$$

waarbij $R_e = \{t_e^{-1} a_e (g_{\alpha(e), i}) t_e = \phi_e(a_e) (g_{\omega(e), j}) \mid a_e \in A_e\}$ voor elke $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$.

In opmerking 3.2.3 stelden we vast dat het boomproduct op een naïeve manier uitbreiden naar een notie voor willekeurige grafen subtiliteiten met zich meebrengt. Zo kan een cykel ervoor zorgen dat twee elementen van een van de groepen G_v geïdentificeerd worden in het boomproduct. Bij fundamentele groepen doen deze fenomenen zich niet voor, aangezien we hier het boomproduct op een doordachtere manier uitbreiden. We vertrekken nog steeds van een boom, maar we voegen nog bogen toe die een andere rol vervullen dan degene die al aanwezig zijn. In plaats van twee deelgroepen te identificeren, zorgen we ervoor dat deze toegevoegd worden aan elkaar. Kort gezegd kunnen we een fundamentele groep beschouwen als een geïtereerde HNN-extensie van een boomproduct.

We zullen later in gevolg 3.4.3 zien dat de keuze van T er eigenlijk niet toe doet: indien we een andere keuze van T maken, dan is het resultaat isomorf aan de originele fundamentele groep. Dit isomorfisme is echter niet noodzakelijk canonisch. We bewijzen eerst de analoga van de lemma's gezien in de voorgaande sectie, maar nu in de context van fundamentele groepen. We behouden in deze sectie de notaties van definitie 3.3.1.

Lemma 3.3.2.

1. De canonische morfismen $G_v \rightarrow \ast_{\Phi}^T G_v$ zijn injectief, en bijgevolg kan iedere groep G_v gezien worden als deelgroep van $\ast_{\Phi}^T G_v$.
2. Zij Δ een niet-ledige samenhangende deelgraaf van Γ , en $\Psi = \Phi|_{\Delta}$. Kies maximale deelbomen T_{Δ} en T van respectievelijk Δ en Γ zodat $T_{\Delta} \subseteq T$. Dan is het canonische morfisme $\ast_{\Psi}^{T_{\Delta}} G_v \rightarrow \ast_{\Phi}^T G_v$ goed gedefinieerd en injectief.
3. Zij gegeven een groep G met een deelgroep $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme met $A \leq G_v$ voor een zekere $v \in V(\Gamma)$. Zij Γ' de graaf die uit Γ bekomen wordt door het toevoegen van een boog e een een top w met $\alpha(e) = v$ en $\omega(e) = w$. Zij Φ' de uitbreiding van Φ tot een afbeelding met domein Γ' , waarvoor $\Phi'(e) = \phi$, $\Phi'(\bar{e}) = \phi^{-1}$ en $\Phi'(w) = G$. Kies een maximale deelboom T van Γ , en zij T' de maximale deelboom van Γ' bekomen uit T door e en w toe te voegen. Dan is het canonische morfisme $\ast_{\Phi'}^{T'} G_v \rightarrow (\ast_{\Phi}^T G_v) \ast_{\phi} G$ een isomorfisme.
4. Zij gegeven een isomorfisme $\phi : A \rightarrow B$ met $A \leq G_v$ en $B \leq G_w$ voor zekere $v, w \in V(\Gamma)$. Zij Γ' de graaf die uit Γ bekomen wordt door het toevoegen van een boog e met $\alpha(e) = v$ en $\omega(e) = w$. Zij Φ' de uitbreiding van Φ tot een afbeelding met domein Γ' , waarvoor $\Phi'(e) = \phi$ en $\Phi'(\bar{e}) = \phi^{-1}$. Kies een maximale deelboom T van Γ . Dan is T ook een maximale deelboom van Γ' , en het canonische morfisme $(\ast_{\Phi}^T G_v) \ast_{\phi} G \rightarrow \ast_{\Phi'}^T G_v$ is een isomorfisme.

Bewijs. Het bewijs gaat analoog als in lemma 3.2.4. We bewijzen alle delen van het lemma simultaan per inductie op $|E(\Gamma)|$. Onderstel opnieuw dat het eerste punt is aangetoond

voor een zekere waarde van $|E(\Gamma)|$. Voor het derde punt zien we opnieuw in dat we de presentaties van $*_{\Phi'}^{T'} G_v$ en $(*_{\Phi}^T G_v) *_{\phi} G$ kunnen gelijkstellen aan elkaar. Zij nu Γ, Γ', Φ en Φ' zoals in het vierde deel. Onderstel dat $*_{\Phi}^T G_v = \langle S \mid R \rangle$. Dan wordt een presentatie van $*_{\Phi'}^{T'} G_v$ gegeven door

$$\langle S, t_e, t_{\bar{e}} \mid R, R_e, R_{\bar{e}}, t_e t_{\bar{e}} = 1, t_{\bar{e}} t_e = 1 \rangle$$

wat per definitie reduceert tot

$$\langle S, t_e, t_{\bar{e}} \mid R, R_e, R_{\bar{e}}, t_e t_{\bar{e}} = 1 \rangle$$

Anderzijds kunnen we de presentatie van $(*_{\Phi}^T G_v) *_{\phi}$ gelijkstellen aan

$$\langle S, t_e \mid R, R_e, R'_e \rangle$$

waarbij R'_e bekomen wordt door elke relatie $t_{\bar{e}}^{-1} a_{\bar{e}}(g_{\alpha(\bar{e}),i}) t_{\bar{e}} = \phi_{\bar{e}}(a_{\bar{e}})(g_{\omega(\bar{e}),j})$ in $R_{\bar{e}}$ te vervangen door $t_e^{-1} \phi_{\bar{e}}(a_{\bar{e}})(g_{\omega(\bar{e}),j}) t_e = a_{\bar{e}}(g_{\alpha(\bar{e}),i})$. Beschouw nu de afbeeldingen

$$\theta : S \cup \{t_e, t_{\bar{e}}\} \rightarrow (*_{\Phi}^T G_v) *_{\phi} : \begin{cases} g \mapsto g & (g \in S) \\ t_e \mapsto t_e \\ t_{\bar{e}} \mapsto t_e^{-1} \end{cases}$$

$$\tau : S \cup \{t_e\} \rightarrow *_{\Phi'}^{T'} G_v : \begin{cases} g \mapsto g & (g \in S) \\ t_e \mapsto t_e \end{cases}$$

Men gaat na dat deze afbeeldingen uitbreiden tot morfismen $\theta' : *_{\Phi'}^{T'} G_v \rightarrow (*_{\Phi}^T G_v) *_{\phi}$ en $\tau' : (*_{\Phi}^T G_v) *_{\phi} \rightarrow *_{\Phi'}^{T'} G_v$ door de substitutietest. Bovendien zijn de bekomen morfismen inversen van elkaar op generatoren, en dus ook globaal. Aangezien θ' het canonische morfisme is vermeld in het vierde punt, is de inductiestap voor dit punt aangetoond.

We tonen nu het tweede punt aan, waarbij we in de inductiehypothese gebruik maken van het derde en vierde punt. Merk op dat het eerste punt opnieuw een bijzonder geval is van het tweede. Zij dus $\Delta, \Gamma, T_{\Delta}, T, \Psi$ en Φ zoals gegeven. Als $|E(\Gamma)| = 0$, dan bestaat Γ uit een top en is het gestelde triviaal. Onderstel dus dat $|E(\Gamma)| > 0$, en zonder verlies van algemeenheid $\Delta \subsetneq \Gamma$. Als Γ een uiteinde heeft (i.e. een top van graad één) dat niet in Δ bevat is, dan is het bewijs van de inductiestap volledig analoog als in lemma 3.2.4. Het enige verschil is dat we hier rekening moeten houden met de gekozen maximale bomen in de presentaties van de optredende fundamentele groepen.

Onderstel nu dat alle uiteinden van Γ in Δ zijn bevat. We tonen aan dat we een boog $e \in E(\Gamma) \setminus E(\Delta)$ kunnen vinden waarvoor $e \notin E(T)$. Onderstel dat dit niet het geval is, dan moet $E(\Gamma) \setminus E(T) \subseteq E(\Delta)$. Neem nu een uiteinde $w_T \in V(T)$ van de boom T . Zij e_T de unieke boog in T met $\omega(e_T) = w_T$. Als dit ook een uiteinde is in Γ , dan moet $w_T \in T_{\Delta}$. Onderstel dus dat er een tweede boog e_{Γ} bestaat met $\omega(e_{\Gamma}) = w_T$. Dan moet $e_{\Gamma} \in E(\Delta)$, en bijgevolg opnieuw $w_T \in T_{\Delta}$. Hiermee hebben we aangetoond dat elk uiteinde van T bevat is in T_{Δ} , en dus moet $T_{\Delta} = T$. Samen met $E(\Gamma) \setminus E(T) \subseteq E(\Delta)$ volgt hieruit dat $\Delta = \Gamma$, een contradictie.

Zij dus $e \notin E(\Delta) \cup E(T)$. Zij Γ' de samenhangende graaf bekomen uit Γ door de boog e te verwijderen. Dan is T een maximale deelboom van Γ' , met $T_{\Delta} \subseteq T$. Zij $\Phi' = \Phi|_{\Gamma'}$. Uit het vierde punt, de eigenschappen van HNN-extensies en de inductiehypothese, zijn

de canonische morfismen

$$\begin{aligned}\theta_1 &: (*_{\Phi'}^T G_v)_{*\phi_e} \rightarrow *_{\Phi}^T G_v \\ \theta_2 &: *_{\Phi'}^T G_v \rightarrow (*_{\Phi'}^T G_v)_{*\phi_e} \\ \theta_3 &: *_{\Psi}^{T\Delta} G_v \rightarrow *_{\Phi'}^T G_v\end{aligned}$$

injectief. Bijgevolg is het canonische morfisme $\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_3 : *_{\Psi}^{T\Delta} G_v \rightarrow *_{\Phi}^T G_v$ injectief. $\square$

Met de laatste twee delen van het voorgaande lemma kunnen we een interessante observatie maken: de volgorde waarin we geamalgameerde producten of HNN-extensies nemen is niet van belang, de resulterende groepen zullen steeds canonisch isomorf zijn aan elkaar.

Gevolg 3.3.3.

1. Voor elke $e \in E(T)$ geldt dat $G'_{\alpha(e)} \cap G'_{\omega(e)} = A'_e = B'_e$ in $*_{\Phi}^T G_v$.
2. Voor elke $e \notin E(T)$ geldt dat $t_e^{-1} A'_e t_e = B'_e$ in $*_{\Phi}^T G_v$.

Bewijs. Voor $e \in E(T)$ is het bewijs analoog is als in gevolg 3.2.5. Merk hiervoor op dat de fundamentele groep van de deelgraaf Δ , bestaande uit de boog e en zijn eindtoppen, een boomproduct is. Als $e \notin E(T)$, dan volgt $t_e^{-1} A'_e t_e = B'_e$ uit de definiërende relaties in R_e van $*_{\Phi}^T G_v$. Inderdaad, deze relaties zeggen ons dat in $*_{\Phi}^T G_v$ geldt dat $t_e^{-1} a'_e t_e = \phi_e(a_e)'$ voor elke $a_e \in A_e$. $\square$

Lemma 3.3.4. *Zij Δ een niet-ledige samenhangende deelgraaf van Γ , en zij Γ/Δ de contractie van Δ in Γ . Kies maximale deelbomen T_{Δ} en T van respectievelijk Δ en Γ zodat $T_{\Delta} \subseteq T$. Dan is $T_{\Gamma/\Delta} = T/T_{\Delta}$ een maximale deelboom van Γ/Δ . Definieer $\tilde{\Phi}$ zoals in lemma 3.2.6, waarbij de optredende fundamentele groepen gedefinieerd zijn met betrekking tot de voorgaande maximale deelbomen. Dan bestaat een canonisch isomorfisme*

$$*_{\Phi}^T G_v \rightarrow *_{\tilde{\Phi}}^{T_{\Gamma/\Delta}} G_{\tilde{v}} \quad (3.2)$$

Bewijs. We tonen eerst aan dat we $T_{\Gamma/\Delta} = T/T_{\Delta}$ inderdaad kunnen zien als een maximale deelboom van Γ/Δ . De toppen- en bogenverzameling van T/T_{Δ} zijn per definitie

$$\begin{aligned}V(T/T_{\Delta}) &= \{\tilde{v} \mid v \in V(T) \setminus V(T_{\Delta})\} \cup \{\tilde{w}\} \\ E(T/T_{\Delta}) &= \{\tilde{e} \mid e \in E(T) \setminus E(T_{\Delta})\}\end{aligned}$$

Anderzijds worden de toppen en bogen van Γ/Δ gegeven door

$$\begin{aligned}V(\Gamma/\Delta) &= \{\tilde{v} \mid v \in V(\Gamma) \setminus V(\Delta)\} \cup \{\tilde{w}\} \\ E(\Gamma/\Delta) &= \{\tilde{e} \mid e \in E(\Gamma) \setminus E(\Delta)\}\end{aligned}$$

Men verifieert makkelijk dat we een injectief graafmorfisme krijgen indien we de toppen en bogen van T/T_{Δ} afbeelden op de corresponderende toppen en bogen in Γ/Δ . Bijgevolg kunnen we T/T_{Δ} op natuurlijke wijze beschouwen als deelgraaf van Γ/Δ . Voor deze identificatie hebben we enkel nodig dat $T_{\Delta} \subseteq \Delta$ en $T \setminus T_{\Delta} \subseteq \Gamma \setminus \Delta$. Merk op dat we dit ook impliciet gebruiken in lemma 3.2.6, waar we aannemen dat Γ'/Δ een deelgraaf is van Γ/Δ . We zullen deze identificatie verderop in het bewijs nog meerdere keren toepassen. Nu bevat $T_{\Gamma/\Delta}$ elke top van Γ/Δ , en dus volstaat het aan te tonen dat $T_{\Gamma/\Delta}$ een boom is. Maar dit volgt uit lemma 3.1.3.

We werken nu per inductie op $|E(\Gamma)|$. Als $\Delta = \Gamma$, dan zijn beide leden van vergelijking (3.2) gelijk aan $*_{\Phi}^T G_v$. Hieruit volgt de inductiebasis. Onderstel nu dat $|E(\Gamma)| > 0$, en $\Delta \subsetneq \Gamma$. Als Γ een uiteinde heeft dat niet bevat is in Δ , dan is het bewijs van de inductiestap analoog als in lemma 3.2.6. Onderstel dus eveneens dat alle uiteinden van Γ bevat zijn in Δ . Dan vinden we zoals in lemma 3.3.2 een boog $e \in E(\Gamma) \setminus E(\Delta)$ waarvoor $e \notin E(T)$. Zij Γ' de graaf bekomen door uit Γ de boog e te verwijderen, en $\Phi' = \Phi|_{\Gamma'}$. Definieer $\tilde{\Phi}'$ opnieuw zoals ervoor, waarbij de maximale deelboom $T_{\Gamma/\Delta}$ van Γ'/Δ gebruikt wordt. Uit de inductiehypothese, en door het vierde punt van lemma 3.3.2 toe te passen op zowel Γ' als Γ'/Δ , hebben we canonische isomorfismen

$$\begin{aligned} *_{\Phi'}^T G_v &\rightarrow *_{\tilde{\Phi}'}^{T_{\Gamma/\Delta}} G_{\tilde{v}} \\ (*_{\Phi'}^T G_v) *_{\phi_e} &\rightarrow *_{\Phi}^T G_v \\ (*_{\tilde{\Phi}'}^{T_{\Gamma/\Delta}} G_{\tilde{v}}) *_{\phi_{\tilde{e}}} &\rightarrow *_{\tilde{\Phi}}^{T_{\Gamma/\Delta}} G_{\tilde{v}} \end{aligned}$$

Bovendien volgt uit stelling 2.2.3 en opmerking 2.2.4 dat het eerste isomorfisme uitbreidt tot een canonisch isomorfisme

$$(*_{\Phi'}^T G_v) *_{\phi_e} \rightarrow (*_{\tilde{\Phi}'}^{T_{\Gamma/\Delta}} G_{\tilde{v}}) *_{\phi_{\tilde{e}}}$$

Met een analoog diagram als in het bewijs van lemma 3.2.6 kan men nagaan dat het diagram in de opgave van stelling 2.2.3 commuteert. Door de laatste drie isomorfismen te combineren krijgen we een isomorfisme

$$*_{\Phi}^T G_v \rightarrow *_{\tilde{\Phi}}^{T_{\Gamma/\Delta}} G_{\tilde{v}}$$

dat corresponderende generatoren op elkaar afbeeldt. Als randgeval verifieert men dat de generator $t_{\tilde{e}}$ achtereenvolgens wordt afgebeeld op $t_{\tilde{e}} \mapsto t_e^{-1} \mapsto t_e^{-1} \mapsto t_{\tilde{e}}$. $\square$

De volgende eigenschap is een veralgemening van lemma 2.1.4 en lemma 2.2.2.

Lemma 3.3.5. *Zij $\psi_v : G_v \rightarrow K$ een morfisme voor elke $v \in V(\Gamma)$, en $k_e \in K$ een element voor elke $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$. Onderstel dat*

1. *Voor elke $e \in E(T)$ en elke $a_e \in A_e$ geldt $\psi_{\alpha(e)}(a_e) = \psi_{\omega(e)}(\phi_e(a_e))$*
2. *Voor elke $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$ en elke $a_e \in A_e$ geldt $k_e^{-1} \psi_{\alpha(e)}(a_e) k_e = \psi_{\omega(e)}(\phi_e(a_e))$*
3. *Voor elke $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$ geldt $k_{\tilde{e}} = k_e^{-1}$*

Dan bestaat een uniek morfisme $\psi_v : *_{\Phi}^T G_v \rightarrow K$ dat voldoet aan $(*\psi_v)(g') = \psi_v(g)$ voor elke $v \in V(\Gamma)$ en $g \in G_v$, en $(*\psi_v)(t_e) = k_e$ voor elke $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$.*

Bewijs. We gebruiken opnieuw de substitutietest. Zij $*_{\Phi}^T G_v = \langle S \mid R \rangle$ de presentatie zoals in de definitie van de fundamentele groep. Het gewenste morfisme moet een uitbreiding zijn van de afbeelding

$$\theta : S \rightarrow K : \begin{cases} g_{vi} \mapsto \psi_v(g_{vi}) & (v \in V(\Gamma), g_{vi} \in S_v) \\ t_e \mapsto k_e & (e \in E(\Gamma) \setminus E(T)) \end{cases}$$

We moeten aantonen dat voor elke $r \in R$ geldt dat $r[\theta(s)/s] = 1$. We overlopen de mogelijke vormen die r kan aannemen. Als $r \in R_v$ voor een zekere $v \in V(\Gamma)$, dan volgt uit het feit dat ψ_v een morfisme is dat

$$r[\theta(s)/s] = r[\psi_v(g_{vi})/g_{vi}] = \psi_v(r) = \psi_v(1) = 1$$

Onderstel nu dat $r \equiv a_e(g_{\alpha(e),i})\phi_e(a_e)^{-1}(g_{\omega(e),j}) \in R_e$, met $e \in E(T)$. Dan is

$$\begin{aligned} r[\theta(s)/s] &= a_e[\psi_{\alpha(e)}(g_{\alpha(e),i})/g_{\alpha(e),i}]\phi_e(a_e)^{-1}[\psi_{\omega(e)}(g_{\omega(e),j})/g_{\omega(e),j}] \\ &= \psi_{\alpha(e)}(a_e)(\psi_{\omega(e)}(\phi_e(a_e)))^{-1} = 1 \end{aligned}$$

door de eerste eigenschap in de opgave. Als $r \equiv t_e^{-1}a_e(g_{\alpha(e),i})t_e \cdot \phi_e(a_e)^{-1}(g_{\omega(e),j}) \in R_e$ met $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$, dan geldt

$$\begin{aligned} r[\theta(s)/s] &= k_e^{-1}a_e[\psi_{\alpha(e)}(g_{\alpha(e),i})/g_{\alpha(e),i}]k_e \cdot \phi_e(a_e)^{-1}[\psi_{\omega(e)}(g_{\omega(e),j})/g_{\omega(e),j}] \\ &= k_e^{-1}\psi_{\alpha(e)}(a_e)k_e \cdot (\psi_{\omega(e)}(\phi_e(a_e)))^{-1} = 1 \end{aligned}$$

door de tweede eigenschap. We moeten enkel nog het geval $r \equiv t_e t_{\bar{e}}$ controleren. Maar dit volgt makkelijk uit de derde eigenschap, want dan is

$$r[\theta(s)/s] = k_e k_{\bar{e}} = 1$$

□

Opmerking 3.3.6. Zij $E_0(\Gamma) \subseteq E(\Gamma)$ een oriëntatie van de bogen van Γ . Dit betekent dat $E_0(\Gamma)$ voor elke $e \in E(\Gamma)$ juist één van de bogen e of $\bar{e}$ bevat. In de voorgaande stelling kunnen we ons beperken tot de bogen van $E_0(\Gamma) \setminus E(T)$ bij het kiezen van de elementen k_e . Inderdaad, de andere elementen zijn dan bepaald door $k_{\bar{e}} = k_e^{-1}$. Als voor elke $e \in E_0(\Gamma) \setminus E(T)$ geldt dat $k_e^{-1}\psi_{\alpha(e)}(a_e)k_e = \psi_{\omega(e)}(\phi_e(a_e))$, dan geldt ook voor $\bar{e} \notin E_0(\Gamma)$ dat $\psi_{\omega(\bar{e})}(\phi_{\bar{e}}(b_e)) = k_{\bar{e}}^{-1}\psi_{\alpha(\bar{e})}(b_e)k_{\bar{e}}$, waarbij $b_e = \phi_e(a_e) \in B_e = A_{\bar{e}}$. Bijgevolg zijn de voorwaarden van lemma 3.3.5 voldaan. We krijgen dus een uitbreiding $\ast \psi_v$ van de morfismen ψ_v , waarvoor $(\ast \psi_v)(t_e) = k_e$ en $(\ast \psi_v)(t_{\bar{e}}) = k_e^{-1}$ als $e \in E_0(\Gamma) \setminus E(T)$.

Net zoals bij geamalgameerde producten en HNN-extensies kunnen we de groepen G_v beschouwen als deelgroepen van de fundamentele groep $\ast_{\Phi}^T G_v$. We zouden lemma 3.3.5 opnieuw kunnen vertalen naar een equivalente formulering in deze context, maar we zullen in het vervolg enkel de voorgaande versie gebruiken om verwarring te vermijden. Uit lemma 3.3.2 volgt dat we bovendien elke groep $\ast_{\Phi'}^{T'} G_v$ kunnen opvatten als deelgroep van $\ast_{\Phi}^T G_v$, indien Φ' en T' restricties zijn van Φ en T . We zeggen dan dat $\ast_{\Phi'}^{T'} G_v$ een canonische deelgroep is van $\ast_{\Phi}^T G_v$. Merk nu op dat de canonische deelgroepen van $\ast_{\Phi'}^{T'} G_v$ overeenkomen met deze van $\ast_{\Phi}^T G_v$ aangezien de optredende canonische morfismen commuteren. Hieruit volgt dat de canonische deelgroepen van $\ast_{\Phi}^T G_v$ onderling op natuurlijke wijze genest zijn: ze vormen een soort hiërarchie, waarbij elke kleinere fundamentele groep bevat is in de grotere. We zullen deze identificaties toepassen in de volgende sectie.

3.4 Acties op bomen

Er bestaat een verrassend verband tussen geamalgameerde producten en HNN-extensies enerzijds, en acties van groepen op een boom anderzijds. Men kan aantonen dat elke groep die een vrije actie heeft op een boom noodzakelijk een vrije groep is. Als de actie niet vrij is, maar wel nog zonder inversie, dan geldt dit niet meer. Maar in dit geval zegt stelling 3.4.2 dat de structuur van deze actie gegeven wordt door stelling 3.4.1. In deze sectie tonen we deze twee stellingen aan. De bewijzen zijn overgenomen uit [20], maar volgen een licht aangepast traject en zijn grondiger uitgewerkt.

Stelling 3.4.1. *Zij Γ een eindige niet-ledige samenhangende graaf met een eindig aantal bogen, T een maximale deelboom van Γ , en $E_0(\Gamma) \subseteq E(\Gamma)$ een willekeurige oriëntatie van de bogen van Γ . Zij*

$$\Phi : \begin{cases} v \in V(\Gamma) \mapsto G_v \\ e \in E(\Gamma) \mapsto \phi_e \end{cases}$$

*een groepsgraaf-structuur op Γ . Dan bestaat een actie van de fundamentele groep $*_{\Phi}^T G_v$ op een graaf X zonder inversie, met de volgende eigenschappen.*

1. *De graaf X is een boom.*
2. *Er bestaat een graafisomorfisme $\iota : \Gamma \rightarrow X/G$.*
3. *Er bestaat een samenhangende lift $\widehat{X/G}$ van X/G in X , die een fundamenteelgebied $\widehat{T}$ van $\iota(T) \subseteq X/G$ bevat. We noteren het beeld van $v \in V(\Gamma)$ in $\widehat{X/G}$ als S_v , en dat van $e \in E(\Gamma)$ als S_e .*
4. *De stabilisator van elke top $S_v \in V(\widehat{X/G})$ wordt gegeven door G_v , en de stabilisator van elke boog $S_e \in E(\widehat{X/G})$ door $A_{|e|}$. Hierbij is $|e| \in \{e, \bar{e}\}$ zo dat $|e| \in E_0(\Gamma)$.*
5. *Voor elke boog $e \in E_0(\Gamma) \setminus E(T)$ geldt dat $\omega(S_e) \notin V(\widehat{X/G})$, en $\omega(S_e) = t_e \cdot S_{\omega(e)}$.*

*Deze actie wordt op isomorfisme na uniek bepaald door eigenschappen 2 – 5. We noemen X de graaf corresponderend met $*_{\Phi}^T G_v$, met betrekking tot de oriëntatie $E_0(\Gamma)$.*

Stelling 3.4.2. *Zij G een groep die zonder inversie werkt op een (niet-ledige) graaf Y , met de volgende eigenschappen.*

1. *De graaf Y is een boom.*
2. *De quotiëntgraaf Y/G is eindig, samenhangend en heeft een eindig aantal bogen.*

*Dan is G isomorf met een zekere fundamentele groep $*_{\Phi}^T G_v$, en de actie $G \curvearrowright Y$ vertaalt zich in de actie van $*_{\Phi}^T G_v$ gegeven in stelling 3.4.1.*

In [20] wordt stelling 3.4.1 bewezen voor veralgemeende fundamentele groepen. In dit geval kan men in stelling 3.4.2 de voorwaarde dat Y/G eindig is en een eindig aantal bogen heeft weglaten. Om onze versie van deze stellingen te veralgemenen, zouden we echter eerst de resultaten van de voorgaande sectie moeten veralgemenen. We zullen ons dus beperken tot het eindige geval.

We merken nu al op dat in het bewijs van stelling 3.4.2 de keuze van T en $E_0(\Gamma)$ willekeurig zal zijn. De uitspraak dat G isomorf is met $*_{\Phi}^T G_v$, en dat de actie zich vertaalt in deze gegeven in stelling 3.4.1, geldt dus voor elke keuze van T en elke keuze van $E_0(\Gamma)$. Hieruit vinden we twee interessante gevolgen. Eerst en vooral hangt de actie gegeven in stelling 3.4.1 op isomorfisme na niet af van de keuze van $E_0(\Gamma)$. Bovendien vinden we het volgende resultaat dat we al eerder hadden vermeld.

Gevolg 3.4.3. *Zij T en T' maximale deelbomen van Γ . Dan is*

$$*_{\Phi}^T G_v \cong *_{\Phi}^{T'} G_v$$

Een direct bewijs van deze uitspraak kan men vinden in [20, Proposition 20]. Hier wordt iets meer bewezen: Voor elke keuze van T is $*_{\Phi}^T G_v$ isomorf met een groep die een veralgemening vormt van het topologische begrip van een fundamentele groep. Indien elke G_v de triviale groep is, dan komt $*_{\Phi}^T G_v$ precies overeen met de fundamentele groep van de graaf Γ . Vandaar dat we de benaming ‘fundamentele groep’ gebruiken voor $*_{\Phi}^T G_v$.

3.4.1 Constructie van de actie van de fundamentele groep

Deze subsectie is gewijd aan het bewijs van stelling 3.4.1. Noteer $G := *_\Phi^T G_v$. In het eerste deel van het bewijs tonen we aan dat de actie inderdaad uniek bepaald moet zijn door eigenschappen 2 – 5. Onderstel daarvoor dat er een actie ψ van G op een graaf Y bestaat die voldoet aan deze eigenschappen. We zullen geleidelijk aan een graaf X construeren en een actie ϕ van G op X die isomorf is met ψ . Dit laatste wil zeggen dat er een graafisomorfisme $f : Y \rightarrow X$ bestaat zodat voor elke $g \in G$ het diagram

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi(g)} & Y \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\phi(g)} & X \end{array}$$

commuteert. Eens we dit aangetoond hebben, zal de uniciteit volgen door in te zien dat de actie ϕ onafhankelijk is van ψ . Omdat de banen van G in Y een partitie vormen van Y , en omdat $\widehat{Y/G}$ een lift is van Y/G , is

$$V(Y) = \bigsqcup_{v \in V(\Gamma)} [S_v^Y] \quad E(Y) = \bigsqcup_{e \in E(\Gamma)} [S_e^Y]$$

We voeren nu de notaties $S_v = G_v$ en $S_e = A_{|e|}$ in voor elke $v \in V(\Gamma)$ en $e \in E(\Gamma)$. Dit zullen later de toppen worden van $\widehat{X/G}$, zoals vermeld in het derde punt van de opgave. Definieer nu

$$V(X) = \bigsqcup_{v \in V(\Gamma)} G/S_v \quad E(X) = \bigsqcup_{e \in E(\Gamma)} G/S_e$$

Door de baan-stabilisator-formule samen met het vierde punt hebben we bijecties

$$\begin{aligned} f_v : [S_v^Y] &\rightarrow G/S_v : g \cdot S_v^Y \mapsto gS_v & (v \in V(\Gamma)) \\ f_e : [S_e^Y] &\rightarrow G/S_e : g \cdot S_e^Y \mapsto gS_e & (e \in E(\Gamma)) \end{aligned}$$

Definieer nu $f : Y \rightarrow X$ als de bijectie verkregen door de afbeeldingen f_v en f_e samen te voegen. De commutativiteit van het diagram aan het begin van het bewijs is dan equivalent met het feit dat de actie van G op X gegeven wordt door linkse vermenigvuldiging, i.e.

$$\phi(g)(hS_v) = ghS_v \quad \phi(g)(hS_e) = ghS_e$$

Verder is f een graafisomorfisme als en slechts als

$$\begin{aligned} \alpha(gS_e) &= \alpha(f(g \cdot S_e^Y)) = f(\alpha(g \cdot S_e^Y)) = f(g \cdot \alpha(S_e^Y)) = \phi(g)(f(\alpha(S_e^Y))) \\ \omega(gS_e) &= \omega(f(g \cdot S_e^Y)) = f(\omega(g \cdot S_e^Y)) = f(g \cdot \omega(S_e^Y)) = \phi(g)(f(\omega(S_e^Y))) \\ \overline{gS_e} &= \overline{f(g \cdot S_e^Y)} = f(\overline{g \cdot S_e^Y}) = f(g \cdot \overline{S_e^Y}) = f(g \cdot S_e^Y) = gS_e \end{aligned}$$

Beschouw nu bijvoorbeeld de tweede vergelijking. We kunnen hieruit als volgt de werking afleiden van de afbeelding $\omega : E(X) \rightarrow V(X)$. Als $e \in T$, dan is $S_e^Y \in \widehat{T_Y}$, en dus moet $\omega(S_e^Y) \in V(\widehat{T_Y}) \subseteq V(\widehat{Y/G})$. In dit geval is dus $f(\omega(S_e^Y)) = f(S_{\omega(e)}^Y) = S_{\omega(e)}$, waaruit volgt dat $\omega(gS_e) = gS_{\omega(e)}$. Stel nu dat $e \notin E(T)$. Als $e \in E_0(\Gamma)$, dan volgt uit het vijfde punt van de opgave dat $f(\omega(S_e^Y)) = f(t_e \cdot S_{\omega(e)}^Y) = t_e S_{\omega(e)}$, en dus $\omega(gS_e) = gt_e S_{\omega(e)}$. In het geval dat $e \notin T \cup E_0(\Gamma)$ is $\omega(S_e^Y) \notin V(\widehat{Y/G})$, en omdat $\widehat{Y/G}$ samenhangend is

moet $\omega(S_e^Y) = \alpha(S_e^Y) \in V(\widehat{Y/G})$. Hieruit volgt dan opnieuw $\omega(gS_e) = gS_{\omega(e)}$. Uit $\alpha(S_e^Y) = \omega(S_e^Y)$ kan men nu de werking van α afleiden. Als $e \in E(T) \cup E_0(\Gamma)$, dan is $\alpha(gS_e) = gS_{\alpha(e)}$. In het andere geval is $\alpha(gS_e) = gt_e^{-1}S_{\alpha(e)}$.

Merk nu op dat we de graaf X hiermee volledig bepaald hebben, en dat X en ϕ inderdaad onafhankelijk zijn van Y en ψ . Dit bewijst de uniciteit, want de eigenschap dat Y een graaf is wordt overgedragen naar X via f . We gaan nu verder met de graaf X die we hier geconstrueerd hebben. In feite weten we pas dat X een graaf is als de graaf Y waarmee we begonnen zijn daadwerkelijk bestaat. We gaan daarom expliciet na:

Lemma 3.4.4. *De bovenstaande constructie van X resulteert in een graaf.*

Bewijs. Dat $\overline{gS_e} = gS_e$ is duidelijk. Ook geldt dat $\overline{gS_e} \neq gS_e$, aangezien we onderstellen dat $G/S_{\bar{e}}$ een disjuncte kopie is van G/S_e . Als $e \in E(T)$ of $e \notin E_0(\Gamma)$, dan is ook duidelijk dat $\alpha(\overline{gS_e}) = \omega(gS_e)$. Zij dus $e \in E_0(\Gamma) \setminus E(T)$. Dan geldt

$$\alpha(\overline{gS_e}) = \alpha(gS_e) = gt_e^{-1}S_{\alpha(\bar{e})} = gt_e S_{\omega(e)} = \omega(gS_e)$$

□

Het is duidelijk dat ϕ een actie zonder inversie bepaalt op X . We gaan vervolgens na dat ϕ aan voorwaarden 2 – 5 van de opgave voldoet. Definieer een bijectie

$$\iota : \Gamma \rightarrow X/G : \begin{cases} v \mapsto [S_v] & (v \in V(\Gamma)) \\ e \mapsto [S_e] & (e \in E(\Gamma)) \end{cases}$$

Uit

$$\begin{aligned} \alpha([S_e]) &= [\alpha(S_e)] = [S_{\alpha(e)}] \\ \omega([S_e]) &= [\omega(S_e)] = [S_{\omega(e)}] \\ \overline{[S_e]} &= [\overline{S_e}] = [S_{\bar{e}}] \end{aligned}$$

voor elke $e \in E(\Gamma)$, volgt dat ι een morfisme is. Dus ι is een isomorfisme. Verder stellen we

$$\begin{aligned} \widehat{X/G} &:= \{S_v \mid v \in V(\Gamma)\} \cup \{S_e \mid e \in E(\Gamma)\} \\ \widehat{T} &:= \{S_v \mid v \in V(T)\} \cup \{S_e \mid e \in E(T)\} \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat $\widehat{X/G}$ een lift is van X/G in X en dat $\widehat{T} \subseteq \widehat{X/G}$. Men gaat analoog zoals voor ι na dat de afbeelding

$$T \rightarrow \widehat{T} : \begin{cases} v \mapsto S_v & (v \in V(T)) \\ e \mapsto S_e & (e \in E(T)) \end{cases}$$

een isomorfisme is. Bijgevolg is $\widehat{T}$ een boom. Merk nu op dat elke boog S_e met $e \notin E(T)$ minstens één eindpunt heeft in $\widehat{T}$. Hieruit volgt de samenhangendheid van $\widehat{X/G}$.

Voor het vierde punt is het duidelijk dat de stabilisator van S_v in G de deelgroep $S_v = G_v$ zelf is, en hetzelfde geldt voor $S_e = A_{|e|}$.

Zij nu $e \in E_0(\Gamma) \setminus E(T)$. De voorwaarde $\omega(S_e) = t_e S_{\omega(e)}$ in het vijfde punt volgt per constructie. Aangezien $\alpha(S_e) = S_{\alpha(e)} \in V(\widehat{X/G})$ zal $\omega(S_e) \notin V(\widehat{X/G})$ volgen uit het feit dat X een boom is. We tonen eerst het volgende aan.

Lemma 3.4.5. *De graaf X is samenhangend.*

Bewijs. Beschouw een willekeurige top gS_v . Omdat G gegenereerd wordt door de groepen G_v en de symbolen t_e , kunnen we g ontbinden in elementen van G_v en elementen t_e , stel $g = x_0 \cdots x_n$. Als $x_n \in G_w$ voor een zekere $w \in V(\Gamma)$, dan bestaat een pad van $x_0 \cdots x_n S_v$ naar $x_0 \cdots x_n S_w = x_0 \cdots x_{n-1} S_w$, aangezien er een pad van S_v naar S_w bestaat in $\widehat{X}/G$. Anderzijds, als $x_n = t_e$, dan geldt

$$\begin{aligned} \alpha(S_e) &= S_{\alpha(e)} & \omega(S_e) &= x_n S_{\omega(e)} & (e \in E_0(\Gamma)) \\ \alpha(x_n S_e) &= S_{\alpha(e)} & \omega(x_n S_e) &= x_n S_{\omega(e)} & (e \notin E_0(\Gamma)) \end{aligned}$$

In elk geval zijn $S_{\alpha(e)}$ en $x_n S_{\omega(e)}$ verbonden door een boog. We vinden dan een pad van $x_0 \cdots x_n S_v$ naar $x_0 \cdots x_n S_{\omega(e)}$, wat op zijn beurt verbonden is met $x_0 \cdots x_{n-1} S_{\alpha(e)}$. Men toont nu per inductie op n aan dat er een pad bestaat van $x_0 \cdots x_n S_v$ naar een zekere top S_w . Aangezien we weten dat de deelgraaf $\widehat{X}/G$ samenhangend is, bewijst dit dat heel X samenhangend is. $\square$

We tonen nu het moeilijkste deel aan, namelijk dat X geen cykels bevat. We zullen dit bewijzen per inductie op $|E(\Gamma)|$. In het triviale geval $|E(\Gamma)| = 0$ ziet men makkelijk in dat X bestaat uit juist één top. De strategie voor de rest van het bewijs is als volgt. We tonen eerst het geval $|E(\Gamma)| = 1$ aan. Hierin bestaat Γ ofwel uit een boog die twee verschillende toppen verbindt, ofwel is Γ een zelflus. In het eerste geval is $*_{\Phi}^T G_v$ een geamalgameerd product, terwijl het tweede geval correspondeert met een HNN-extensie. In het geval $|E(\Gamma)| \geq 2$ zullen we het derde en vierde punt van lemma 3.3.2 gebruiken om de inductiehypothese te kunnen toepassen.

Lemma 3.4.6. *Als Γ bestaat uit één enkele boog met twee verschillende eindtoppen, dan is X een boom.*

Bewijs. Noteer de boog van Γ met e , en stel $v = \alpha(e) \neq \omega(e) = w$. Door het derde punt van lemma 3.3.2 bestaat een canonisch isomorfisme $G_v *_{\phi_e} G_w \rightarrow G$. Onderstel voor een contradictie dat er een cykel in X bestaat. Stel deze voor door $(g_1 S_{e_1}, \dots, g_n S_{e_n})$, met $g_i \in G$ en $e_i \in \{e, \bar{e}\}$. Dan geldt

$$g_i S_{\omega(e_i)} = \omega(g_i S_{e_i}) = \alpha(g_{i+1} S_{e_{i+1}}) = g_{i+1} S_{\alpha(e_{i+1})} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.3)$$

$$g_i S_{e_i} \neq \overline{g_{i+1} S_{e_{i+1}}} = g_{i+1} \overline{S_{e_{i+1}}} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.4)$$

waarbij we de indices i modulo n beschouwen. Uit vergelijking (3.3) halen we

$$\omega(e_i) = \iota^{-1}([S_{\omega(e_i)}]) = \iota^{-1}([S_{\alpha(e_{i+1})}]) = \alpha(e_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

Definieer $S_i := S_{\omega(e_i)} = S_{\alpha(e_{i+1})} \in \{G_v, G_w\}$ en $x_i := g_i^{-1} g_{i+1}$. Dan geldt

$$x_1 \cdots x_n = 1$$

We tonen aan dat $(x_1, \dots, x_n)$ een gereduceerde rij is. Uit (3.3) volgt dat x_i de top S_i stabiliseert, dus $x_i \in S_i$. Per definitie is $S_i \neq S_{i+1}$ voor $1 \leq i \leq n$, dus S_i alterneert tussen G_v en G_w . Verder volgt uit (3.4) dat $x_i \notin S_{e_i} = A_{|e|}$, omdat $\overline{e_{i+1}} = e_i$. Door gevolg 2.1.15 kan het morfisme $G_v *_{\phi_e} G_w \rightarrow G$ niet injectief zijn, zodat we een contradictie krijgen. $\square$

We beschouwen nu het geval waarbij Γ een zelflus is. Het bewijs dat X een boom is verloopt analoog als in lemma 3.4.6, maar in dit geval gebruiken we het Lemma van Britton (gevolg 2.2.14).

Lemma 3.4.7. *Als Γ bestaat uit één enkele boog die een top met zichzelf verbindt, dan is X een boom.*

Bewijs. Zij e de unieke boog in $E_0(\Gamma)$ en $v \in V(\Gamma)$ de top. Dan is $G \cong G_v *_{\phi_e}$. Onderstel opnieuw voor een contradictie dat een cykel $(g_1 S_{e_1}, \dots, g_n S_{e_n})$ van X bestaat. Definieer

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & e_i = e \\ 0 & e_i = \bar{e} \end{cases}$$

Vergelijkingen (3.3) en (3.4) worden in dit geval

$$g_i t_e^{\delta_i} S_{\omega(e_i)} = \omega(g_i S_{e_i}) = \alpha(g_{i+1} S_{e_{i+1}}) = g_{i+1} t_e^{1-\delta_{i+1}} S_{\alpha(e_{i+1})} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.5)$$

$$g_i S_{e_i} \neq \overline{g_{i+1} S_{e_{i+1}}} = g_{i+1} S_{\bar{e}_{i+1}} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.6)$$

waarbij opnieuw i modulo n wordt beschouwd. Zij $x_i := t_e^{-\delta_i} g_i^{-1} g_{i+1} t_e^{1-\delta_{i+1}} \in S_v = G_v$. Als we $\varepsilon_i = 2\delta_i - 1 \in \{+1, -1\}$ stellen, dan geldt

$$t_e^{\varepsilon_1} x_1 t_e^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t_e^{\varepsilon_n} x_n = 1$$

We gaan na dat de rij $(1, t_e^{\varepsilon_1}, x_1, \dots, t_e^{\varepsilon_n}, x_n)$ gereduceerd is. We krijgen dan een contradictie aangezien het canonische morfisme $G_v *_{\phi_e} \rightarrow G$ niet injectief zou zijn. Onderstel dus $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ voor $1 \leq i \leq n$. We hebben dan het geval waar $\varepsilon_i = 1$ en het geval waar $\varepsilon_i = -1$. We bespreken eerst $\varepsilon_i = 1$. Dit komt overeen met $e_i = e$ en $e_{i+1} = \bar{e}$. Uit (3.6) volgt dan dat $g_i^{-1} g_{i+1} \notin S_e = A_e$, zodat $x_i \notin t_e^{-1} A_e t_e = B_e$ (zie gevolg 3.3.3). In het andere geval waarbij $e_i = \bar{e}$ en $e_{i+1} = e$ bekomt men analoog dat $x_i \notin A_e$. $\square$

Onderstel nu dat $|E(\Gamma)| \geq 2$. We beschouwen eerst het geval waarbij Γ een blad v' heeft. Zij e' de unieke boog met $\omega(e') = v'$, en stel $\alpha(e') = w$. Zij Γ' de graaf bekomen uit Γ door e' en v' te verwijderen, en $\Phi' = \Phi|_{\Gamma'}$. Noteer $G' = *_{\Phi'}^{T'} G_v$, waarbij $T' = T \cap \Gamma'$. Dan is $G \cong G' *_{\phi_{e'}} G_{v'}$. We kunnen daarom G' beschouwen als deelgroep van G . Zij U de deelverzameling van $\widehat{X/G}$ die overeenkomt met Γ' . Dan is $X' = G' \cdot U$ de graaf corresponderend met G' en de oriëntatie $E_0(\Gamma') = E_0(\Gamma) \cap E(\Gamma')$. Inderdaad, de definities $S_v = G_v$ en $S_e = A_{|e|}$ blijven onveranderd, en

$$V(X') = \bigsqcup_{v \in V(\Gamma')} G'/S_v \quad E(X') = \bigsqcup_{e \in E(\Gamma')} G'/S_e$$

Zij $e \in E(\Gamma')$ willekeurig. Als $e \in E(T')$, dan is ook $e \in E(T)$, dus $\alpha(g S_e) = g S_{\alpha(e)}$ en $\omega(g S_e) = g S_{\omega(e)}$ voor alle $g \in G'$. Zij nu $e \notin E(T')$. Als $e \in E_0(\Gamma')$, dan geldt ook $e \in E_0(\Gamma) \setminus E(T)$. Bijgevolg is $\alpha(g S_e) = g S_{\alpha(e)}$ en $\omega(g S_e) = g t_e S_{\omega(e)}$. Een analoog resultaat geldt voor $e \notin E_0(\Gamma')$. We zien dus dat ook de functies α , ω en $\bar{\cdot}$ geïnduceerd door X overeenkomen met deze van de graaf corresponderend met G' . We kunnen dus uit de inductiehypothese besluiten dat X' een boom is. Zij nu $\{g_i \mid i \in I\}$ een verzameling van representanten van de linker nevenklassen van G' in G . Omdat elke $g \in G$ op unieke wijze geschreven kan worden als $g_i g'$ met $i \in I$ en $g' \in G'$, vormen de deelgrafen $\{g_i X' \mid i \in I\}$ een partitie van de deelgraaf $Y := G \cdot U$ van X . Merk op dat $\{g_i X' \mid i \in I\}$ de samenhangende componenten zijn van Y , omdat elke $g_i X'$ een graaf is. Zij X/Y de graaf bekomen uit X door contractie van Y . Dan is

$$\begin{aligned} V(X/Y) &= \{\widetilde{g S_{v'}} \mid g \in G\} \sqcup \{\widetilde{g_i S_w} \mid i \in I\} \\ E(X/Y) &= \{\widetilde{g S_{e'}} \mid g \in G\} \sqcup \{\widetilde{g S_{e'}} \mid g \in G\} \end{aligned}$$

waarbij

$$\begin{aligned}\alpha(\widetilde{gS_{e'}}) &= \widetilde{g_iS_w} & \alpha(\widetilde{gS_{e'}}) &= \widetilde{gS_{v'}} & (g \in g_iG') \\ \omega(\widetilde{gS_{e'}}) &= \widetilde{gS_{v'}} & \omega(\widetilde{gS_{e'}}) &= \widetilde{g_iS_w} & (g \in g_iG') \\ \overline{\widetilde{gS_e}} &= \widetilde{gS_{\bar{e}}} & & & (e \in \{e', \bar{e}'\})\end{aligned}$$

We tonen aan dat X/Y isomorf is met de graaf Z corresponderend met het geamalgameerd product $G' *_{\phi_{e'}} G_{v'}$, waarbij Γ bestaat uit een boog met twee verschillende eindtoppen die respectievelijk corresponderen met G' en $G_{v'}$. We zullen $G' *_{\phi_{e'}} G_{v'}$ identificeren met G . De canonische deelgroepen van $G' *_{\phi_{e'}} G_{v'}$ en G komen dan overeen, en we hebben dat

$$V(Z) = (G/S_{v'}) \sqcup (G/G') \quad E(Z) = (G/S_{e'}) \sqcup (G/S_{\bar{e}'})$$

waarbij

$$\begin{aligned}\alpha_Z(gS_{e'}) &= gG' & \alpha_Z(gS_{\bar{e}'}) &= gS_{v'} \\ \omega_Z(gS_{e'}) &= gS_{v'} & \omega_Z(gS_{\bar{e}'}) &= gG' \\ \overline{\widetilde{gS_e}}^Z &= gS_{\bar{e}} & & (e \in \{e', \bar{e}'\})\end{aligned}$$

Definieer nu

$$f : X/Y \rightarrow Z : \begin{cases} \widetilde{gS_{v'}} \mapsto gS_{v'} \\ \widetilde{g_iS_w} \mapsto g_iG' \\ \widetilde{gS_e} \mapsto gS_e \end{cases} \quad (e \in \{e', \bar{e}'\})$$

Merk op dat uit $\widetilde{g_iS_w} = \widetilde{g_jS_w}$ volgt dat $g_i^{-1}g_j \in S_w \leq G'$, zodat f goed gedefinieerd is. Omgekeerd volgt uit $\widetilde{g_iS_w} \neq \widetilde{g_jS_w}$ dat $g_i \neq g_j$, zodat per definitie $g_iG' \neq g_jG'$. Hieruit zien we dat f injectief is. Voor de surjectiviteit moeten we enkel aantonen dat elk element gG' bereikt wordt. Maar dit volgt opnieuw omdat $\{g_i \mid i \in I\}$ een verzameling van representanten is van de linkernevenklassen van G' in G . Er geldt nu dat

$$\begin{aligned}\alpha_Z(f(\widetilde{gS_{e'}})) &= \alpha_Z(gS_{e'}) = gG' = g_iG' = f(\widetilde{g_iS_w}) = f(\alpha(\widetilde{gS_{e'}})) \\ \alpha_Z(f(\widetilde{gS_{\bar{e}'}})) &= \alpha_Z(gS_{\bar{e}'}) = gS_{v'} = f(\widetilde{gS_{v'}}) = f(\alpha(\widetilde{gS_{\bar{e}'}})) \\ \overline{\widetilde{f(gS_e)}}^Z &= \overline{\widetilde{gS_e}}^Z = gS_{\bar{e}} = f(\widetilde{gS_{\bar{e}}}) = f(\widetilde{gS_{\bar{e}}}) = f(\widetilde{gS_{\bar{e}}})\end{aligned}$$

waarbij $i \in I$ gekozen werd zodat $g \in g_iG'$, en $e \in \{e', \bar{e}'\}$. Analoge vergelijkingen gelden voor ω in plaats van α . We hebben hiermee aangetoond dat f een isomorfisme is. Door lemma 3.4.6 weten we dat Z een boom is, en dus is ook X/Y een boom. Omdat Y bestaat uit een collectie van bomen, volgt uit lemma 3.1.3 en opmerking 3.1.4 dat X een boom is. Hiermee is het geval waarbij Γ een blad heeft afgewerkt.

Onderstel nu dat Γ geen bladeren heeft. De inductiestap is hier analoog als ervoor. We bespreken daarom enkel in detail de zaken die verschillend zijn van het voorgaande geval. We vinden een boog $e' \in E_0(\Gamma) \setminus E(T)$. Onderstel dat $\alpha(e') = v'$ en $\omega(e') = w'$. We definiëren opnieuw Γ' als de graaf bekomen door e' te verwijderen, en $\Phi' = \Phi|_{\Gamma'}$. We definiëren opnieuw $G' = *_{\Phi'}^{T'} G_v$, $U \subseteq \widehat{X/G}$ corresponderend met Γ' , en $X' = G' \cdot U$. Analoog als ervoor volgt uit de inductiehypothese dat X' een boom is. Opnieuw bestaat $Y = G \cdot U$ uit de bomen $\{g_iX' \mid i \in I\}$. Het enige wat niet bevat is in Y zijn bogen van de vorm $gS_{e'}$ met $g \in G$. Als we X/Y opnieuw definiëren zoals ervoor, dan is

$$V(X/Y) = \{\widetilde{g_iS_{v'}} \mid i \in I\} \quad E(X/Y) = \{\widetilde{gS_{e'}} \mid g \in G\}$$

waarbij

$$\begin{aligned} \alpha(\widetilde{gS_{e'}}) &= \widetilde{g_iS_{v'}} & \alpha(\widetilde{gS_{e'}}) &= \widetilde{g_jS_{v'}} & (g \in g_iG', gt_{e'} \in g_jG') \\ \omega(\widetilde{gS_{e'}}) &= \widetilde{g_jS_{v'}} & \omega(\widetilde{gS_{e'}}) &= \widetilde{g_iS_{v'}} & (g \in g_iG', gt_{e'} \in g_jG') \\ \widetilde{gS_e} &= \widetilde{gS_e} & & & (e \in \{e', e'\}) \end{aligned}$$

Anderzijds wordt de graaf Z corresponderend met de HNN-extensie $G' *_{\phi_{e'}}$ gegeven door

$$V(Z) = G/G' \quad E(Z) = (G/S_{e'}) \sqcup (G/S_{e'})$$

De afbeeldingen α_Z , ω_Z en $\bar{\cdot}^Z$ zijn opnieuw gedefinieerd zoals gewoonlijk. Men gaat nu na dat

$$f : X/Y \rightarrow Z : \begin{cases} \widetilde{g_iS_{v'}} \mapsto g_iG' \\ \widetilde{gS_e} \mapsto gS_e \end{cases} \quad (e \in \{e', e'\})$$

een graafisomorfisme is. Bijgevolg is X/Y , en dus ook X , een boom. Hiermee sluiten we het bewijs van stelling 3.4.1 af.

3.4.2 Karakterisatie van groepsacties zonder inversie op bomen

We nemen in deze subsectie de notaties aan die gegeven zijn in de opgave van stelling 3.4.2. Dus G is een groep, en Y is de boom waarop G werkt. Omdat Y/G eindig en samenhangend is, vinden we een maximale deelboom T van Y/G . Uit lemma 3.1.9 vinden we een fundamenteaalgebied $\widehat{T}$ van T in Y . Noteer het isomorfisme als

$$\iota : T \rightarrow \widehat{T} : \begin{cases} v \mapsto S_v^Y & (v \in V(T)) \\ e \mapsto S_e^Y & (e \in E(T)) \end{cases}$$

We breiden nu ι uit tot een afbeelding $\iota : Y/G \rightarrow \widehat{Y/G}$, waarbij $\widehat{Y/G}$ een samenhangende lift is van Y/G in Y . We zullen dit doen door geleidelijk aan bogen toe te voegen aan $\widehat{T}$, op een analoge manier zoals in het bewijs van lemma 3.1.9. Kies daarvoor een willekeurige oriëntatie $E_0(Y/G) \subseteq E(Y/G)$, en zij $e \in E_0(Y/G) \setminus E(T)$ willekeurig. Kies dan $\hat{e} \in E(Y)$ met $[\hat{e}] = e$. Dan is $[\alpha(\hat{e})] = \alpha([\hat{e}]) \in V(T)$, dus vinden we $g_e \in G$ zodat $\alpha(g_e \cdot \hat{e}) = g_e \cdot \alpha(\hat{e}) \in V(\widehat{T})$. We stellen dan $S_e^Y := g_e \cdot \hat{e}$. Verder stellen we $S_e^Y := \overline{S_e^Y}$. Merk op dat $\omega(S_e^Y) \notin V(\widehat{Y/G})$, want $S_e^Y \notin E(\widehat{T})$ en Y is een boom. Zij voor elke $e \in E_0(Y/G) \setminus E(T)$, $k_e \in G$ zo dat $\omega(S_e^Y) = k_e \cdot S_{\omega(e)}^Y$. Deze elementen bestaan omdat $[\omega(S_e^Y)] = \omega(e) = [S_{\omega(e)}^Y]$. We definiëren nu $k_e = k_e^{-1}$. Zij verder G_v en G_e de stabilisatoren in G van respectievelijk de toppen S_v^Y en de bogen S_e^Y van $\widehat{Y/G}$. Definieer een groepsgraaf-structuur op Y/G door

$$\Phi : \begin{cases} v \mapsto G_v & (v \in V(Y/G)) \\ e \mapsto \phi_e & (e \in E(Y/G)) \end{cases}$$

waarbij we ϕ_e als volgt definiëren. In het geval $e \in E(T)$ zijn $G_{\alpha(e)}$ en $G_{\omega(e)}$ de stabilisatoren van de eindtoppen van de boog S_e^Y . Bijgevolg is $G_{\alpha(e)} \cap G_{\omega(e)} = G_e$, en we kunnen $\phi_e = \text{id}_{G_e}$ stellen. Als nu $e \in E_0(Y/G) \setminus E(T)$, dan hebben we enkel dat $G_e \leq G_{\alpha(e)}$. Maar uit $k_e \cdot S_{\omega(e)}^Y = \omega(S_e^Y)$ volgt dat $k_e^{-1}G_e k_e \leq G_{\omega(e)}$. We kunnen dus $\phi_e : G_e \rightarrow k_e^{-1}G_e k_e : g \mapsto k_e^{-1}gk_e$ stellen. In het laatste geval waar $e \notin E(T)$ en

$e \notin E_0(Y/G)$ stellen we $\phi_e = \phi_{\bar{e}}^{-1}$. De voorwaarden van lemma 3.3.5 zijn triviaal voldaan als we ψ_v gelijkstellen aan de inclusie $G_v \rightarrow G$ (zie ook opmerking 3.3.6). Bijgevolg breiden deze inclusies uit tot een morfisme

$$* \psi_v : *_\Phi^T G_v \rightarrow G$$

waarvoor $(* \psi_v)(t_e) = k_e$.

Zij vervolgens X de graaf van stelling 3.4.1 corresponderend met $*_\Phi^T G_v$ en de oriëntatie $E_0(Y/G)$ van Y/G . We zullen een morfisme $f : X \rightarrow Y$ construeren waarvoor het diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{(* \psi_v)(g)} & Y \end{array}$$

commuteert, voor elke $g \in *_\Phi^T G_v$. Definieer hiervoor

$$f : X \rightarrow Y : \begin{cases} gS_v \mapsto (* \psi_v)(g) \cdot S_v^Y & (v \in V(Y/G)) \\ gS_e \mapsto (* \psi_v)(g) \cdot S_e^Y & (e \in E(Y/G)) \end{cases}$$

Dat bovenstaand diagram commuteert is dan triviaal.

Lemma 3.4.8. *De afbeelding $f : X \rightarrow Y$ is een graafmorfisme.*

Bewijs. Er geldt

$$f(\overline{gS_e}) = (* \psi_v)(g) \cdot S_e^Y = \overline{(* \psi_v)(g) \cdot S_e^Y} = \overline{f(gS_e)}$$

Met een gevallenonderscheid voor $e \in E(Y/G)$ gaat men bovendien makkelijk na dat f commuteert met α en ω . Als bijvoorbeeld $e \in E_0(Y/G) \setminus E(T)$, dan is

$$\begin{aligned} \alpha(f(gS_e)) &= (* \psi_v)(g) \cdot \alpha(S_e^Y) = (* \psi_v)(g) \cdot S_{\alpha(e)}^Y = f(gS_{\alpha(e)}) = f(\alpha(gS_e)) \\ \omega(f(gS_e)) &= (* \psi_v)(g) \cdot \omega(S_e^Y) = (* \psi_v)(g) \cdot k_e \cdot S_{\omega(e)}^Y = (* \psi_v)(gt_e) \cdot S_{\omega(e)}^Y = f(\omega(gS_e)) \end{aligned}$$

□

Van zodra we aantonen dat $* \psi_v$ en f isomorfismen zijn, is stelling 3.4.2 bewezen. Dit zal volgen uit het feit dat Y een boom is. We beginnen met:

Lemma 3.4.9. *f is surjectief.*

Bewijs. We moeten aantonen dat $H \cdot \widehat{Y/G} = Y$, waarbij H het beeld is van $* \psi_v$ in G . Aangezien Y een boom is volstaat het aan te tonen dat als $\alpha(e) \in H \cdot \widehat{Y/G}$, dan ook $e, \omega(e) \in H \cdot \widehat{Y/G}$. Door een argument per inductie toont men dan aan dat elke boog en elke top van Y bevat zijn in $H \cdot \widehat{Y/G}$ (Merk op dat $h \cdot \bar{e} = \overline{h \cdot e}$ voor elke $h \in H$). We mogen zonder verlies van algemeenheid onderstellen dat $\alpha(e) \in V(\widehat{Y/G})$. Nu vinden we $g \in G$ en $S_{e_0}^Y \in E(\widehat{Y/G})$ zodat $g \cdot S_{e_0}^Y = e$, en we moeten aantonen dat $g \in H$. Als $e_0 \in E(T) \cup E_0(Y/G)$, dan hebben we dat $g \cdot S_{\alpha(e_0)}^Y = \alpha(g \cdot S_{e_0}^Y) = \alpha(e) \in V(\widehat{Y/G})$. Maar ook $S_{\alpha(e_0)}^Y \in V(\widehat{Y/G})$, en $[g \cdot S_{\alpha(e_0)}^Y] = [S_{\alpha(e_0)}^Y] = \alpha(e_0)$. Omdat $\widehat{Y/G}$ een lift is van Y/G moet $g \cdot S_{\alpha(e_0)}^Y = S_{\alpha(e_0)}^Y$. Dus g is bevat in de stabilisator van $S_{\alpha(e_0)}^Y$, i.e. $g \in G_{\alpha(e_0)}$. Nu is

$G_{\alpha(e_0)} \leq H$ aangezien $\ast \psi_v$ een uitbreiding is van de inclusie $G_{\alpha(e_0)} \rightarrow G$. Onderstel nu dat $e_0 \notin E(T) \cup E_0(\Gamma)$. In dit geval is

$$gk_{e_0}^{-1} \cdot S_{\alpha(e_0)}^Y = gk_{\bar{e}_0} \cdot S_{\omega(\bar{e}_0)}^Y = \omega(g \cdot S_{\bar{e}_0}^Y) = \alpha(g \cdot S_{e_0}^Y) = \alpha(e) \in V(Y/\widehat{G})$$

Analoog als ervoor vinden we dat $gk_{e_0}^{-1} \in G_{\alpha(e_0)}$, dus $g \in k_{e_0}G_{\alpha(e_0)}$. Nu is $k_{e_0}G_{\alpha(e_0)} \leq H$ want $k_{e_0} = (\ast \psi_v)(t_{e_0})$. $\square$

Lemma 3.4.10. $\ast \psi_v$ is surjectief.

Bewijs. Zij $g \in G$ willekeurig. We moeten aantonen dat $g \in H$. Kies hiervoor willekeurig $S_v^Y \in V(Y/\widehat{G})$ en beschouw de top $g \cdot S_v^Y \in V(Y)$. We vinden $h \in H$ zodat $g \cdot S_v^Y = h \cdot S_v^Y$. Dan is $h^{-1}g \in G_v \leq H$, en dus $g \in H$. $\square$

Om de injectiviteit van f aan te tonen hebben we eerst het volgende hulplemma nodig.

Lemma 3.4.11. f is lokaal injectief, m.a.w. f is injectief op elke verzameling bogen die starten in dezelfde top.

Bewijs. Zij $gS_{e_1}, hS_{e_2} \in E(X)$ met $\alpha(gS_{e_1}) = \alpha(hS_{e_2})$. Men ziet makkelijk in dat noodzakelijk $e_1 = e_2 = e \in E(X)$. We moeten aantonen dat uit $(\ast \psi_v)(g) \cdot S_e^Y = (\ast \psi_v)(h) \cdot S_e^Y$ volgt dat $gS_e = hS_e$. Om verwarring te vermijden zullen we de deelgroepen van $\ast_{\mathbb{F}}^T G_v$ corresponderend met G_v , A_e en B_e noteren als respectievelijk G'_v , A'_e en B'_e . Hierbij zijn A_e en B_e de deelgroepen van $G_{\alpha(e)}$ en $G_{\omega(e)}$ waaruit ϕ_e vertrekt en eindigt, respectievelijk. Het volstaat nu om aan te tonen dat $(\ast \psi_v)(g^{-1}h) \in G_e$ impliceert dat $g^{-1}h \in A'_{|e|}$, want door stelling 3.4.1 is $A'_{|e|}$ de stabilisator van S_e . We hebben voor elke $e \in E(Y/\widehat{G})$ een commutatief diagram

$$\begin{array}{ccccccc} G'_{\alpha(e)} & \longleftarrow & A'_e & \xrightarrow{\phi'_e} & B'_e & \longrightarrow & G'_{\omega(e)} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ G_{\alpha(e)} & \longleftarrow & A_e & \xrightarrow{\phi_e} & B_e & \longrightarrow & G_{\omega(e)} \end{array}$$

Merk nu op dat de pijlen die van boven naar onder gaan in het diagram overeenkomen met $\ast \psi_v$. Onderstel eerst dat $e \in E(T) \cup E_0(Y/\widehat{G})$. Dan vinden we uit $\alpha(gS_e) = \alpha(hS_e)$ dat $g^{-1}h \in G'_{\alpha(e)}$. Hieruit volgt dan $g^{-1}h = (\ast \psi_v)(g^{-1}h)' \in G'_e = A'_e = A'_{|e|}$. Zij nu $e \notin E_0(Y/\widehat{G}) \cup E(T)$. Dan geeft $\alpha(gS_e) = \alpha(hS_e)$ dat $t_e g^{-1} h t_e^{-1} \in G'_{\alpha(e)}$. Dus geldt $t_e g^{-1} h t_e^{-1} = (\ast \psi_v)(t_e g^{-1} h t_e^{-1})' = (k_e (\ast \psi_v)(g^{-1}h) k_e^{-1})' \in (k_e G_e k_e^{-1})' = A'_e$. Omdat ϕ'_e gegeven wordt door toevoeging met t_e , volgt dat $g^{-1}h \in B'_e = A'_{|e|}$. $\square$

Lemma 3.4.12. f is injectief.

Bewijs. Kies twee verschillende toppen $v, w \in V(Y)$. We moeten aantonen dat $f(v) \neq f(w)$. Indien v en w bogen zijn blijft het argument hetzelfde. Omdat Y een boom is, bestaat een uniek injectief pad in Y dat start in v en eindigt in w . Zij dit pad gegeven door $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$, met $v_0 = v$ en $v_n = w$. Beschouw nu $f(P) = (f(v_0), f(e_1), f(v_1), \dots, f(e_n), f(v_n))$. Omdat f een morfisme is, vormt $f(P)$ een pad in X . Omdat X een boom is, volstaat het aan te tonen dat het pad $f(P)$ lokaal injectief is, want daaruit volgt $f(v) = f(v_0) \neq f(v_n) = f(w)$. Maar dit geldt omdat f lokaal injectief is, want uit $f(e_{i+1}) = f(e_i)$ zou volgen dat $f(e_{i+1}) = f(\bar{e}_i)$, en $\alpha(e_{i+1}) = \omega(e_i) = \alpha(\bar{e}_i)$. $\square$

Lemma 3.4.13. $\ast \psi_v$ is injectief.

Bewijs. Zij $g \in N = \ker(*\psi_v)$ niet-triviaal. Kies een willekeurige top S_v van X . Omdat $*\psi_v$ injectief is op G_v , is $g \notin G_v$. Dit wil zeggen dat gS_v verschillend is van S_v in X . Maar $f(gS_v) = (*\psi_v)(g) \cdot S_v^Y = S_v^Y = f(S_v)$, strijdig met het feit dat f injectief is. $\square$

Met dit laatste lemma volgt dat de actie van G op Y isomorf is met deze van $*_{\Phi}^T G_v$ op X , en hiermee is stelling 3.4.2 bewezen.

De structuur van de boom X waarop $*_{\Phi}^T G_v$ werkt is in het algemeen niet makkelijk te beschrijven. Deze boom heeft meestal een oneindig aantal vertakkingen vanuit elke top. In het eenvoudigste geval waar $*_{\Phi}^T G_v \cong G *_{\phi} H$ een geamalgameerd product is, vormt X een bipartiete graaf waarvan de ene helft van de toppen correspondeert met de nevenklassen van G en $G *_{\phi} H$, en de andere helft met de nevenklassen van H . De bogen zijn de nevenklassen van de deelgroepen A en B in $G *_{\phi} H$. Een top van de vorm xG is verbonden met een boog yA indien $xG = yG$, ofwel $y \in xG$. Hieruit volgt dat er een bijectie bestaat tussen de bogen startend vanuit xG en de elementen van G/A .

3.5 Applicaties

Het volgende lemma is overgenomen uit [20, Propositie 19].

Lemma 3.5.1. *Zij G een groep die zonder inversie werkt op een boom Γ . Als er een niet-ledige deelverzameling $S \subseteq V(\Gamma)$ bestaat zodat $G \cdot S$ begrensd is in Γ , dan is $\text{Fix}_{V(\Gamma)}(G) \neq \emptyset$.*

Bewijs. Zij $\Delta \subseteq \Gamma$ de deelboom gegenereerd door $G \cdot S$. Dit betekent dat Δ bestaat uit elk pad dat twee verschillende toppen van $G \cdot S$ verbindt. Dan is Δ een begrensde boom, en bovendien induceert de actie van G op Γ een actie van G op Δ . Per inductie op de diameter van Δ tonen we aan dat er een fixpunt van G in $V(\Delta)$ bestaat. Als $\text{Diam}(\Delta) = 0$, dan is het gestelde triviaal. Als $\text{Diam}(\Delta) = 1$, dan bestaat Δ uit twee toppen verbonden door een boog. Aangezien G zonder inversie werkt, worden beide bogen van Δ vastgehouden, en dus ook alle twee de toppen van Δ . Onderstel nu dat $\text{Diam}(\Delta) \geq 2$. Zij Δ' de boom bekomen uit Δ door alle bladeren, samen met alle bogen die een blad als eindpunt hebben, te verwijderen. Beschouw de actie van een element $g \in G$ op Δ . Aangezien dit element werkt als een automorfisme moeten bladeren op bladeren worden afgebeeld, en niet-bladeren op niet-bladeren. Bijgevolg vormt de restrictie van g tot Δ' een automorfisme van Δ' , en dit voor alle $g \in G$. Dus de actie van G op Δ induceert een actie van G op Δ' . Omdat $\text{Diam}(\Delta') = \text{Diam}(\Delta) - 2$, kunnen we de inductiehypothese toepassen, waaruit het gestelde volgt. $\square$

De formulering van het volgende lemma veralgemeent [20, Stelling 8], maar het bewijs blijft ongewijzigd.

Stelling 3.5.2. *Als $K \leq *_{\Phi}^T G_v$ een eindige deelgroep is, dan is K bevat in een toegevoegde van één van de groepen G_v .*

Bewijs. Noteer $G := *_{\Phi}^T G_v$. Uit stelling 3.4.1 vinden we een boom X waarop G zonder inversie werkt, en een samenhangende lift $\widehat{X/G} \subseteq X$ van X/G . Bovendien worden de stabilisatoren van de toppen van $\widehat{X/G}$ gegeven door de groepen G_v . Omdat K eindig is, is ook $K \cdot V(\widehat{X/G})$ eindig, dus begrensd. Bovendien induceert de actie van G op X een actie van K op X , dus kunnen we het voorgaande lemma toepassen met K en X in de plaats van G en Γ . Hieruit volgt dat er een zekere top xS_v van X gefixeerd wordt door K , met $x \in G$ en $S_v \in V(\widehat{X/G})$. Dit betekent dat $K \leq \text{Stab}_G(xS_v) = x \text{Stab}_G(S_v)x^{-1} = xG_v x^{-1}$. $\square$

Beschouwen we de specifieke gevallen waarin $\ast_{\Phi}^T G_v$ een geamalgameerd product of een HNN-extensie is, dan vinden we de volgende twee resultaten.

Gevolg 3.5.3. *Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als $K \leq G \ast_{\phi} H$ een eindige deelgroep is, dan is K bevat in een toegevoegde van één van de factoren van $G \ast_{\phi} H$.*

Gevolg 3.5.4. *Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als $K \leq G \ast_{\phi}$ een eindige deelgroep is, dan is K bevat in een toegevoegde van de basis van $G \ast_{\phi}$.*

Voor we dit hoofdstuk afsluiten geven we nog de volgende twee stellingen zonder bewijs. Deze algemene resultaten zullen later nog van pas komen.

Stelling 3.5.5 (Nielsen-Schreier). *Elke deelgroep $H \leq F$ van een vrije groep F is opnieuw een vrije groep.*

Bewijs. We verwijzen hiervoor naar [20, Stelling 5]. Men heeft de resultaten van de voorgaande sectie eigenlijk niet nodig om dit te bewijzen. $\square$

We noteren de rang van een willekeurige groep G als $\text{rk}(G)$. Dit is het minimale aantal elementen waarmee G voortgebracht kan worden. Indien G niet eindig voortgebracht is, dan stellen we per conventie $\text{rk}(G) = \infty$. Verder wordt het vrij product $\ast_{i \in I} G_i$ van een willekeurige familie van groepen $\{G_i \mid i \in I\}$ gedefinieerd als de groep waarvan de presentatie bekomen wordt door alle presentaties van de groepen G_i bij elkaar te voegen.

Stelling 3.5.6 (Grushko-Neumann). *Voor elke verzameling I en elke familie van groepen $\{G_i \mid i \in I\}$ geldt dat $\text{rk}(\ast_{i \in I} G_i) = \sum_{i \in I} \text{rk}(G_i)$.*

Bewijs. Een relatief kort bewijs dat gebruikt maakt van Bass-Serre-theorie wordt gegeven in [5][Stelling 10.6]. $\square$

Hoofdstuk IV

Stallings-theorie

4.1 Bipolaire structuren

Definitie 4.1.1. Zij G een groep. Een bipolaire structuur op G is een partitie van G in deelverzamelingen $F, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*$ die voldoen aan de volgende eigenschappen (Hierbij zijn $X, Y, Z, X_i \in \{E, E^*\}$, en we nemen aan dat $E^{**} = E$):

1. F is een deelgroep van G
2. Als $f \in F$ en $g \in XY$, dan $gf \in XY$
3. Als $g \in XY$, dan $g^{-1} \in YX$
4. Als $g \in XY$ en $h \in Y^*Z$, dan $gh \in XZ$
5. Voor elke $g \in G$ bestaat een $N(g) \in \mathbb{N}$ zodat $g = g_1 \cdots g_n$ met $g_i \in X_{i-1}X_i^*$ impliceert dat $n \leq N(g)$
6. $EE^* \neq \emptyset$

In Stallings' originele artikel [22] werd een bipolaire structuur gedefinieerd als een partitie van een groep G in zes verzamelingen. Naast de verzamelingen die we hier beschouwen was er een bijkomende verzameling S , samen met twee bijkomende axioma's die restricties leggen op S . We werken hier met de compactere definitie gegeven in [14], aangezien dit voor onze doeleinden volstaat. De verzameling S is van belang in het bewijs van de karakterisatie van groepen met een oneindig aantal uiteinden (stelling 4.2.25).

De gekende normaalvormen van het geamalgameerd product en de HNN-extensie bieden een manier om een bipolaire structuur op deze groepen te definiëren. Dit wordt duidelijk gemaakt door de volgende voorbeelden, die afkomstig zijn uit [14, p. 207–208].

Voorbeeld 4.1.2. Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij T_A, T_B verzamelingen van representanten van de rechter nevenklassen van respectievelijk A in G en B in H . Als $A = G$ of $B = H$, dan noemen we $G *_\phi H$ een triviaal geamalgameerd product. Merk op dat een triviaal geamalgameerd product isomorf is met één van zijn factoren G of H . Voor dit voorbeeld is het belangrijk dat we onderstellen dat $G *_\phi H$ niet-triviaal is, dus $A \neq G$ en $B \neq H$. We construeren een bipolaire structuur op $G *_\phi H$ als volgt. Elk element $x \in G *_\phi H$ heeft een normaalvorm $x = x_0 \cdots x_n$ die voldoet aan de eigenschappen van stelling 2.1.7. We definiëren F als de verzameling van al deze elementen x waarvoor $n = 0$, i.e. $x = x_0$ in normaalvorm. Voor elementen x waarvoor $n > 0$ stellen we verder

$$\begin{aligned}
 x \in EE &\iff x_1 \in T_A \setminus \{1\} \wedge x_n \in T_A \setminus \{1\} \\
 x \in EE^* &\iff x_1 \in T_A \setminus \{1\} \wedge x_n \in T_B \setminus \{1\} \\
 x \in E^*E &\iff x_1 \in T_B \setminus \{1\} \wedge x_n \in T_A \setminus \{1\} \\
 x \in E^*E^* &\iff x_1 \in T_B \setminus \{1\} \wedge x_n \in T_B \setminus \{1\}
 \end{aligned}$$

Dat $\{F, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}$ een partitie is van $G *_\phi H$ volgt uit de uniciteit van de normaalvorm. We gaan nu de axioma's na. Het eerste axioma is duidelijk, aangezien F in dit geval wordt gegeven door $A \leq G *_\phi H$. Het zesde axioma volgt uit het feit dat $G *_\phi H$ niet-triviaal is, zodat $T_A \neq \{1\}$ en $T_B \neq \{1\}$. We tonen het vierde axioma aan. Beschouw bijvoorbeeld het geval waar $g \in EE$ en $h \in E^*E^*$. Zij de normaalvormen van g en h gegeven door $g = g_0g_1 \cdots g_n$ en $h = h_0h_1 \cdots h_m$. Dan is $gh = g_0g_1 \cdots g_nh_0h_1 \cdots h_m$, waarbij de laatste uitdrukking niet noodzakelijk een normaalvorm voorstelt. Zij $gh = x_0 \cdots x_k$ in normaalvorm. We moeten aantonen dat $k > 0$, $x_1 \in T_A \setminus \{1\}$ en $x_k \in T_B \setminus \{1\}$. We kunnen hiervoor stelling 2.1.14 gebruiken, als volgt. In het geval $k = 0$ zijn zowel (x_0) als $(g_0g_1, \dots, g_n, h_0h_1, \dots, h_m)$ gereduceerde rijen. Het product van deze rijen is dan gelijk, maar dit is onmogelijk doordat de lengtes van de rijen verschillen. Als $k > 0$, dan is $(x_0x_1, \dots, x_k)$ gereduceerd, en uit stelling 2.1.14 volgt dat x_0x_1 en x_k respectievelijk tot dezelfde factor behoren als g_0g_1 en h_m . Dan geldt inderdaad dat $x_1 \in T_A \setminus \{1\}$ en $x_k \in T_B \setminus \{1\}$. Deze strategie kan men in het algemeen toepassen om alle gevallen van axioma 4 na te gaan, alsook axioma's 2 en 3. We gaan tenslotte het vijfde axioma na. Zij $g \in G$ willekeurig. Als $g = x_0 \cdots x_k$ de normaalvorm is van g , dan stellen we $N(g) := k$. Onderstel dat $g = g_1 \cdots g_n$ met $g_i \in X_{i-1}X_i^*$. Door elke g_i te ontbinden in normaalvorm vinden we dat $g_1 \cdots g_n$ het product is van een gereduceerde rij van lengte minstens n . Stel dus $g_1 \cdots g_n = y_1 \cdots y_m$, waarbij $m \geq n$ en $(y_1, \dots, y_m)$ gereduceerd is. Het geval $k = 0$ kan zich niet voordoen. Inderdaad, door stelling 2.1.14 moet dan gelden dat $m = 1$ en $y_1 = x_0 \in A$, maar zelfs als $m = 1$ is $y_1 \notin A$. Zij dus $k > 0$. Dan moet door stelling 2.1.14 gelden dat $m = k$, en bijgevolg $n \leq m = N(g)$.

Voorbeeld 4.1.3. Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Zij T_A, T_B verzamelingen van representanten van de rechter nevenklassen van respectievelijk A en B in G . Beschouw de HNN-extensie $G *_\phi$, waarin we G beschouwen als deelgroep. We definiëren een bipolaire structuur op $G *_\phi$ analoog als in voorgaand voorbeeld. Zij $x \in G *_\phi$, en onderstel dat $x = x_0t^{\varepsilon_1}x_1 \cdots t^{\varepsilon_n}x_n$ in normaalvorm. We definiëren F als de deelgroep A , dus $x \in F \iff n = 0 \wedge x_0 \in A$. Verder stellen we

$$\begin{aligned} x \in EE &\iff ((x_0 \in G \setminus A) \vee (\varepsilon_1 = -1)) \wedge ((x_n \in G \setminus A) \vee (\varepsilon_n = +1)) \\ x \in EE^* &\iff ((x_0 \in G \setminus A) \vee (\varepsilon_1 = -1)) \wedge ((x_n \in A) \wedge (\varepsilon_n = -1)) \\ x \in E^*E &\iff ((x_0 \in A) \wedge (\varepsilon_1 = +1)) \wedge ((x_n \in G \setminus A) \vee (\varepsilon_n = +1)) \\ x \in E^*E^* &\iff ((x_0 \in A) \wedge (\varepsilon_1 = +1)) \wedge ((x_n \in A) \wedge (\varepsilon_n = -1)) \end{aligned}$$

waarbij we ervan uitgaan dat een voorwaarde zoals $\varepsilon_1 = -1$ nooit vervuld is wanneer $n = 0$. Men gaat na dat voor elke $x \notin A$ juist één van de vier bovenstaande formules moet gelden, zodat deze verzamelingen een partitie vormen van G . Het zesde axioma volgt omdat $t^{-1} \in EE^*$. Als voorbeeld demonstreren we hoe men het vierde axioma bewijst, in het geval dat $g \in EE$ en $h \in E^*E^*$. De andere gevallen zijn analoog. Zij $g = g_0t^{\varepsilon_1}g_1 \cdots t^{\varepsilon_n}g_n$ en $h = h_0t^{\delta_1}h_1 \cdots t^{\delta_m}h_m$ de normaalvormen van g en h . Men gaat na dat met de voorwaarden opgelegd op g en h de rij $(g_0, t^{\varepsilon_1}, g_1, \dots, t^{\varepsilon_n}, g_nt^{\delta_1}h_1, \dots, t^{\delta_m}h_m)$ gereduceerd is. Zij nu $gh = x_0t^{\zeta_1}x_1 \cdots t^{\zeta_k}x_k$ in normaalvorm, dan is ook $(x_0, t^{\zeta_1}, x_1, \dots, t^{\zeta_k}, x_k)$ gereduceerd. We tonen eerst aan dat $(x_0 \in G \setminus A) \vee (\zeta_1 = -1)$. In het geval $n = 0$ moet $g_0 \in G \setminus A$, en omdat $h_0 \in A$ en $\delta_1 = +1$ volgt het gestelde uit het vierde punt van stelling 2.2.13. Zij nu $n > 0$. Indien $\varepsilon_1 = -1$, dan is $\zeta_1 = -1$. Stel dus eveneens dat $\varepsilon_1 = +1$. Dan moet $g_0 \in G \setminus A$ en we bevinden ons opnieuw in dezelfde situatie als bij het geval $n = 0$. Dat $(x_k \in A) \wedge (\zeta_k = -1)$ volgt uit $h_m \in A$ en $\delta_m = -1$. Men bewijst axioma's 2 en 3 op een gelijkaardige manier. We tonen tenslotte nog axioma 5 aan. Zij

$g = g_1 \cdots g_n$ met $g_i \in X_{i-1}X_i^*$. Zoals in voorgaand voorbeeld kunnen we elke g_i ontbinden in normaalvorm zodat $g_1 \cdots g_n = y_0 t^{\delta_1} y_1 \cdots t^{\delta_m} y_m$, waarbij $(y_0, t^{\delta_1}, y_1, \dots, t^{\delta_m}, y_m)$ gereduceerd is. Merk nu op dat als $g_i \in EE^*$ of $g_i \in E^*E$, dan levert g_i minstens één factor t^{δ_j} op in deze gereduceerde rij. Als $g_i \in E^*E^*$, dan zijn dit twee zulke factoren. Bijgevolg is m minstens het aantal keer dat E^* voorkomt in het woord $X_0X_1^*X_1X_2^* \cdots X_{n-1}X_n^*$, wat op zijn beurt minstens $n-1$ is. Dus $n \leq m+1$. Zij nu $g = x_0 t^{\zeta_1} x_1 \cdots t^{\zeta_k} x_k$ in normaalvorm. Uit stelling 2.2.13 volgt dat $m = k$, dus kunnen we $N(g) := k+1$ stellen.

Ons volgende doel is om aan te tonen dat de voorgaande twee voorbeelden de enige voorbeelden zijn. Meer precies zullen we aantonen dat elke groep G waarop men een bipolaire structuur kan definiëren een niet-triviaal geamalgameerd product of een HNN-extensie is. Hiervoor hebben we het begrip van een irreducibel element nodig.

Definitie 4.1.4. Zij G een groep met een bipolaire structuur $\{F, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}$. Een element $p \in G$ wordt irreducibel genoemd als p niet kan geschreven worden als $p = gh$, waarbij $g \in XY$ en $h \in Y^*Z$.

Merk op dat elk element $p \in F$ irreducibel is door axioma 4 en het feit dat F disjunct is met de andere verzamelingen van de bipolaire structuur. Bovendien wordt door axioma 5 elke groep met een bipolaire structuur voortgebracht door zijn irreducibele elementen.

Men kan de irreducibele elementen ook zien als de elementen $g \in G$ waarvoor $N(g) = 1$ kan worden gekozen. Hieruit volgt alvast dat elk element van $G \cup H$ in voorbeeld 4.1.2 irreducibel is. Omgekeerd heeft elk element dat niet bevat is in $G \cup H$ lengte minstens twee, waaruit we zien dat zo'n element niet irreducibel kan zijn. We besluiten dus dat de irreducibele elementen van een niet-triviaal geamalgameerd product juist de elementen zijn die bevat zijn in één van de factoren. Analooeg is elk element van G irreducibel in voorbeeld 4.1.3, maar in dit geval zijn dit niet de enige irreducibele elementen. We berekenen de andere irreducibele elementen binnenkort in voorbeeld 4.1.8. Eerst onderzoeken we een aantal eigenschappen van deze elementen.

De volgende drie lemma's worden bewezen in [14, p. 209]. In de opgave van deze lemma's gaan we ervan uit dat we beschikken over een groep G uitgerust met een bipolaire structuur $\{F, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}$. De symbolen X, Y, Z stellen opnieuw E of E^* voor.

Lemma 4.1.5. *Als $g \in XY$ irreducibel is, dan is ook $g^{-1} \in YX$ irreducibel.*

Bewijs. Door axioma 3 moet $g^{-1} \in YX$. Als g^{-1} niet irreducibel is, dan volgt per definitie en uit axioma 4 dat $g^{-1} = pq$, met $p \in YZ$ en $q \in Z^*X$ voor een zekere $Z \in \{E, E^*\}$. Maar dan is $g = q^{-1}p^{-1}$, met $q^{-1} \in XZ^*$ en $p^{-1} \in ZY$ door axioma 3, strijdig met het feit dat g irreducibel is. $\square$

Lemma 4.1.6. *Als $g \in XY$ en $h \in YZ$ irreducibel zijn, dan is $gh \in F \cup XZ$ irreducibel.*

Bewijs. Onderstel voor een contradictie dat $gh \notin F \cup XZ$. De gevallen die overblijven zijn $gh \in X^*W$ of $gh \in WZ^*$ voor een zekere $W \in \{E, E^*\}$. Als bijvoorbeeld $gh \in X^*W$, dan geldt $h = g^{-1}(gh)$ met $g^{-1} \in YX$ door axioma 1. Dit geeft een contradictie omdat h irreducibel is. Als $gh \in WZ^*$, dan vinden we een analoge contradictie uit $g = (gh)h^{-1}$. We tonen vervolgens aan dat gh irreducibel is. Als dit niet zo is, dan volgt uit de definitie en axioma 4 dat $gh = pq$, met $p \in XW$ en $q \in W^*Z$ voor een zekere $W \in \{E, E^*\}$. Omdat h irreducibel is, is ook $h^{-1} = q^{-1}(qh^{-1})$ irreducibel door lemma 4.1.5. Dus moet gelden dat $qh^{-1} \in F \cup W^*V$ voor een zekere $V \in \{E, E^*\}$. Maar $qh^{-1} \in W^*V$ kan zich niet voordoen omdat $g = p(qh^{-1})$ irreducibel is. Dus moet $qh^{-1} \in F$ en $g = p(qh^{-1}) \in XW$ door axioma 2. Hieruit volgt dan $W = Y$. Maar dan is $h^{-1} = q^{-1}(qh^{-1}) \in ZY^*$ door axioma's 2 en 3, een strijdigheid. $\square$

Lemma 4.1.7. *Als $g \in XY$ irreducibel is en $f \in F$, dan zijn $fg, gf \in XY$ irreducibel.*

Bewijs. Door axioma 2 is $gf \in XY$. Als gf niet irreducibel is, dan is $g = p(qf^{-1})$ ook niet irreducibel door axioma's 1 en 2, een contradictie. Door lemma 4.1.5 en axioma 3 is ook $g^{-1} \in YX$ irreducibel. Uit het eerste deel van het bewijs volgt dan dat $g^{-1}f^{-1} \in YX$ irreducibel is. Opnieuw toepassen van lemma 4.1.5 levert dat $fg = (g^{-1}f^{-1})^{-1} \in XY$ irreducibel is. $\square$

Het volgende voorbeeld is zelfstandig uitgewerkt.

Voorbeeld 4.1.8. We hadden eerder al opgemerkt dat de irreducibele elementen van een niet-triviaal geamalgameerd product juist de elementen van de factoren zijn. Beschouw nu een HNN-extensie $G *_\phi$ met een bipolaire structuur zoals in voorbeeld 4.1.3. Zij $x \in EE^*$ willekeurig. Dan is de normaalvorm van x van de vorm $x = x_0 t^{\varepsilon_1} x_1 \cdots x_{n-1} t^{-1}$. Stel eerst dat $n \geq 2$. Als $\varepsilon_1 = -1$, dan is $x_0 t^{\varepsilon_1} \in EE^*$. Indien $x_1 = 1$ moet $\varepsilon_2 = -1$, zodat in ieder geval $x_1 t^{\varepsilon_2} \cdots x_{n-1} t^{-1} \in EE^*$. Dus x is niet irreducibel. Stel nu dat $\varepsilon_1 = +1$. Dan is $x_0 \in G \setminus A$, zodat $x_0 \in EE$. Ook is $t^{\varepsilon_1} x_1 \cdots x_{n-1} t^{-1} \in E^*E^*$, dus x is opnieuw niet irreducibel. Er rest enkel nog het geval $n = 1$ te beschouwen, waarbij $x = x_0 t^{-1}$. Als x in dit geval niet irreducibel zou zijn, dan moet $x = pq$ met ofwel $p \in EE^*$ en $q \in EE^*$, ofwel $p \in EE$ en $q \in E^*E^*$. In beide gevallen bevat de normaalvorm van pq twee factoren $t^{\pm 1}$, een strijdigheid. We besluiten dus dat de irreducibele elementen van EE^* van de vorm gt^{-1} zijn, met $g \in G$. Door lemma 4.1.5 kennen we ook de irreducibele elementen van E^*E : het zijn de inversen van deze van EE^* , wat neerkomt op elementen $x = x_0 t x_1$ met $x_0 \in A$. We vermelden nog zonder bewijs dat men op een gelijkaardige manier de irreducibele elementen van EE en E^*E^* kan berekenen. Deze zijn respectievelijk de elementen van $G \setminus A$ en de elementen van de vorm $x = x_0 t x_1 t^{-1}$, met $x_0 \in A$ en $x_1 \in T_B \setminus \{1\}$. Dat deze elementen inderdaad irreducibel zijn volgt makkelijk uit lemma 4.1.6 door irreducibele elementen van E^*E en EE^* met elkaar te vermenigvuldigen.

Het bewijs van het volgende resultaat is afkomstig uit [14, Hoofdstuk 4, Stelling 6.5].

Stelling 4.1.9. *Zij G een groep met een bipolaire structuur $\{F, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}$. Dan is G isomorf met een niet-triviaal geamalgameerd product of een HNN-extensie, en de bipolaire structuur op G vertaalt zich onder dit isomorfisme naar één van de bipolaire structuren gezien in voorbeelden 4.1.2 en 4.1.3.*

Bewijs. We definiëren

$$\begin{aligned} G_1 &:= F \cup \{x \in EE \mid x \text{ is irreducibel}\} \\ G_2 &:= F \cup \{x \in E^*E^* \mid x \text{ is irreducibel}\} \end{aligned}$$

Uit axioma 1 en lemma's 4.1.5, 4.1.6 en 4.1.7 volgt dat G_1 en G_2 deelgroepen zijn van de groep G . We hebben nu twee gevallen.

GEVAL 1. Onderstel eerst dat de verzameling EE^* geen irreducibele elementen bevat. We tonen aan dat $G \cong G_1 *_\phi G_2$, waarbij $\phi = \text{id}_F$. Definieer hiervoor de inclusies $\psi : G_1 \rightarrow G$ en $\chi : G_2 \rightarrow G$. Door lemma 2.1.4 breiden deze morfismen uit tot een morfisme

$$\psi * \chi : G_1 *_\phi G_2 \rightarrow G$$

zodat $(\psi * \chi)(g'_1) = \psi(g_1) = g_1$ en $(\psi * \chi)(g'_2) = \chi(g_2) = g_2$ voor alle $g_1 \in G_1$ en $g_2 \in G_2$. We tonen aan dat dit een isomorfisme is. Door lemma 4.1.5 bevat E^*E eveneens geen

irreducibele elementen, en bijgevolg zijn de irreducibele elementen juist de elementen van $G_1 \cup G_2$. Nu volgt uit axioma 5 dat G wordt voortgebracht door zijn irreducibele elementen, dus door $G_1 \cup G_2$. Hieruit volgt alvast dat elke $g \in G$ bereikt wordt door $\psi * \chi$, dus dat $\psi * \chi$ surjectief is.

Het is makkelijk om in te zien dat $G_1 *_\phi G_2$ een niet-triviaal geamalgameerd product is: als bijvoorbeeld $G_1 = F$, dan wordt G voortgebracht door G_2 , dus $G = G_2$. Maar dan zou $EE^* = \emptyset$, wat niet kan door axioma 6. Een analoog argument geldt als $G_2 = F$.

We noteren vervolgens de bipolaire structuur van $G_1 *_\phi G_2$ gegeven in voorbeeld 4.1.2 als $\{F', EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}$. We tonen aan dat voor elke $g \in G_1 *_\phi G_2$ geldt dat $g \in F' \implies (\psi * \chi)(g) \in F$ en $g \in XY \implies (\psi * \chi)(g) \in XY$. Omdat $\psi * \chi$ injectief is op F' volgt dan dat $(\psi * \chi)(g) \neq 1$ wanneer $g \neq 1$, dus dat $\psi * \chi$ injectief is. De implicaties $g \in F' \implies (\psi * \chi)(g) \in F$ en $g \in XY \implies (\psi * \chi)(g) \in XY$ worden dan equivalenties.

Als $g \in F'$, dan is $g = f'$ met $f \in F$, en $(\psi * \chi)(g) = f \in F$. Onderstel nu dat $g \in XY$, en zij $g = g'_0 \cdots g'_n$ in normaalvorm. We tonen per inductie op n aan dat $(\psi * \chi)(g) = g_0 \cdots g_n \in XY$. Het geval $n = 0$ kan zich niet voordoen, want dan zou $g \in F'$. Als $n = 1$, dan is $g \in G'_1 \setminus F' \subseteq EE$ of $g \in G'_2 \setminus F' \subseteq E^*E^*$, waaruit respectievelijk $(\psi * \chi)(g) \in G_1 \setminus F \subseteq EE$ of $(\psi * \chi)(g) \in G_2 \setminus F \subseteq E^*E^*$. Onderstel nu dat $n \geq 2$. We beschouwen het geval waarbij $g \in EE^*$. De andere gevallen gaan analoog. Dan geldt dat $g'_n \in G'_2 \setminus F'$, zodat $g_n \in G_2 \setminus F \subseteq E^*E^*$. Er moet ook gelden dat $g'_{n-1} \in G'_1 \setminus F'$, en dus $g'_0 \cdots g'_{n-1} \in EE$. Dan is $g_0 \cdots g_{n-1} \in EE$ door de inductiehypothese. Uit axioma 4 volgt nu dat $g_0 \cdots g_n \in EE^*$. Dit vervolledigt het eerste deel van het bewijs.

GEVAL 2. Stel nu dat E^*E een irreducibel element k bevat. We tonen aan dat in dit geval $G \cong G_1 *_\phi$, waarbij $\phi : F \rightarrow k^{-1}Fk : f \mapsto k^{-1}fk$. Merk op dat $k^{-1}fk \in G_1$ door lemma's 4.1.5, 4.1.6 en 4.1.7. Zij $\psi : G_1 \rightarrow G$ opnieuw gedefinieerd als de inclusie. Door lemma 2.2.2 breidt ψ uit tot een morfisme

$$\Psi : G_1 *_\phi \rightarrow G$$

zodat $\Psi(g') = \psi(g) = g$ voor elke $g \in G_1$, en $\Psi(t) = k$. We tonen opnieuw aan dat dit een isomorfisme is. Voor de surjectiviteit volstaat het aan te tonen dat G wordt voortgebracht door G_1 en het element $k \in G$. Daarvoor volstaat het dat elk irreducibel element bevat is in de deelgroep voortgebracht door G_1 en k . Zij dus $g \in G$ irreducibel. Als $g \in F \cup EE$, dan is het gestelde duidelijk. Als $g \in EE^*$, dan is $gk \in G_1$ irreducibel door lemma 4.1.6, en $g = (gk)k^{-1}$. Als $g \in E^*E$, dan is $g^{-1} \in EE^*$ en herleiden we het gestelde tot het voorgaande geval. In het laatste geval waarbij $g \in E^*E^*$ is $gk \in F \cup E^*E$ irreducibel. Als $gk \in F$, dan zijn we klaar. Als $gk \in E^*E$, dan worden we opnieuw herleid tot het tweede geval. Dit bewijst de surjectiviteit. Noteer nu de bipolaire structuur van $G_1 *_\phi$ gegeven in voorbeeld 4.1.3 als $\{F', EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}$. We tonen opnieuw de implicaties $g \in F' \implies \Psi(g) \in F$ en $g \in XY \implies \Psi(g) \in XY$ aan. Hieruit volgt dan de injectiviteit van Ψ , en de implicaties worden equivalenties.

Als $g \in F'$, dan is $\Psi(g) \in F$ opnieuw triviaal. Veronderstel dus dat $g \in XY$, en zij $g = g'_0 t^{\varepsilon_1} g'_1 \cdots t^{\varepsilon_n} g'_n$ in normaalvorm. We tonen aan dat $\Psi(g) = g_0 k^{\varepsilon_1} g_1 \cdots k^{\varepsilon_n} g_n \in XY$, per inductie op n . Als $n = 0$, dan moet $g \in G'_1 \setminus F' \subseteq EE$, zodat $\Psi(g) \in G_1 \setminus F \subseteq EE$.

Stel nu dat $n = 1$. We beschouwen eerst het geval $\varepsilon_1 = -1$. Als $g_1 \in G_1 \setminus F$, dan is $g \in EE$. We moeten aantonen dat $g_0 k^{-1} g_1 \in EE$. Als $g_0 \in F$, dan volgt dit uit de axioma's van de bipolaire structuur van G . Stel dus $g_0 \in G_1 \setminus F$. Dan is $g_0 k^{-1} \in F \cup EE^*$ door lemma 4.1.6, dus $g_0 k^{-1} g_1 \in EE$. Als $g_1 \in F$, dan is $g \in EE^*$. Als $g_0 \in F$, dan is duidelijk ook $g_0 k^{-1} g_1 \in EE^*$. Stel dus dat $g_0 \in G_1 \setminus F$. In dit geval vinden we dat $g_0 k^{-1} g_1 \in F \cup EE^*$. Maar als $g_0 k^{-1} g_1 \in F \leq G_1$, dan zou $k^{-1} \in G_1$, wat niet kan

omdat $k^{-1} \in EE^*$. Dus moet opnieuw $g_0 k^{-1} g_1 \in EE^*$. Hiermee is het geval $\varepsilon_1 = -1$ bewezen. Als $\varepsilon_1 = +1$, dan werkt men analoog. Het enige verschil is dat men nu eerst een gevallenonderscheid naar g_0 maakt en dan pas naar g_1 .

Stel dus voor de rest van het bewijs dat $n \geq 2$. We beschouwen dan het gedeelte $x := g'_0 t^{\varepsilon_1} g'_1 \cdots t^{\varepsilon_{n-2}} g'_{n-2}$. Onderstel eerst dat $\varepsilon_{n-1} = -1$. Als $\varepsilon_n = +1$, dan is $g_{n-1} \in G_1 \setminus F$. In dit geval is dus $xt^{\varepsilon_{n-1}} \in XE^*$ en $g'_{n-1} t^{\varepsilon_n} g'_n \in EY$ voor zekere $X, Y \in \{E, E^*\}$. Het gestelde volgt dan uit de inductiehypothese en uit axioma 4. Als $\varepsilon_n = -1$, dan geldt opnieuw $xt^{\varepsilon_{n-1}} \in XE^*$ en $g'_{n-1} t^{\varepsilon_n} g'_n \in EY$.

Onderstel nu dat $\varepsilon_{n-1} = +1$, en zij ook $\varepsilon_n = +1$. Dan is $xt^{\varepsilon_{n-1}} g'_{n-1} \in XE$ en $t^{\varepsilon_n} g'_n \in E^*Y$, en we zijn opnieuw klaar. Het moeilijkste geval treedt op wanneer $\varepsilon_n = -1$. Merk op dat in dit geval $tg'_{n-1} t^{-1} \in E^*E^*$. Uit de voorgaande lemma's volgt dat kg_{n-1} een irreducibel element is van $F \cup E^*E$. Maar uit $kg_{n-1} \in F$ zou volgen dat $k \in G_1$, dus we besluiten dat $kg_{n-1} \in E^*E$. Dan is $kg_{n-1} k^{-1} \in F \cup E^*E^*$. Als $kg_{n-1} k^{-1} \in F$ zou gelden, dan zou $g_{n-1} \in \phi(F)$, wat een strijdigheid levert door de eigenschappen van de normaalvorm van g . Dus $kg_{n-1} k^{-1} \in E^*E^*$. Nu is $g'_n \in F' \cup EE$, en ook $x \in F' \cup ZE$ voor een zekere $Z \in \{E, E^*\}$. Inderdaad, uit $x \in ZE^*$ zou volgen dat x eindigt in t^{-1} , wat een contradictie geeft door de eigenschappen van de normaalvorm van g . Door de inductiehypothese samen met de axioma's van de bipolaire structuren van $G *_\phi$ en G , is $\Psi(g) = \Psi(x)(kg_{n-1} k^{-1})g_n$ bevat in dezelfde verzameling XY als g . Hiermee is de stelling bewezen. $\square$

Ons doel is nu om met het voorgaande resultaat stellingen 4.1.12 en 4.1.13 verderop aan te tonen, die herformuleringen zijn van [14, Hoofdstuk 4, Stelling 6.6]. Deze stellingen geven informatie over de structuur van bepaalde deelgroepen van respectievelijk het geamalgameerd product en de HNN-extensie. Aangezien in [14] enkel het geval van het geamalgameerd product wordt uitgewerkt, beperken we ons hier tot de HNN-extensie. Het bewijs verloopt analoog, maar wordt hier in meer detail uitgewerkt. We hebben eerst twee voorbereidende lemma's nodig.

Lemma 4.1.10. *Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als $K \leq G *_\phi H$ een eindig voortgebrachte deelgroep is, dan is minstens één van de volgende uitspraken waar.*

1. K is bevat in een toegevoegde van G of H .
2. K bevat een element dat toegevoegd is aan een cyclisch gereduceerd element van lengte minstens twee.

Het bewijs van het voorgaande lemma is analoog aan dat van lemma 4.1.11, en wordt ook gegeven in [14]. We laten het dus achterwege. Merk op dat we uit lemma 2.1.17 weten dat elk element van K toegevoegd is aan een cyclisch gereduceerd element. Als het tweede punt in de opgave dus niet voldaan is, dan is elk element van K toegevoegd aan een cyclisch gereduceerd element van lengte één, i.e. een element in één van de factoren.

Lemma 4.1.11. *Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als $K \leq G *_\phi$ een eindig voortgebrachte deelgroep is, dan is minstens één van de volgende uitspraken waar.*

1. K is bevat in een toegevoegde van G .
2. K bevat een element dat toegevoegd is aan een cyclisch gereduceerd element van lengte minstens één.

Bewijs. Kies een verzameling $\{k_1, \dots, k_l\}$ van voortbrengende elementen van K zodanig dat de som van de lengtes van de elementen k_i minimaal is. Deze som s is een variabele die afhangt van K . We bewijzen per inductie op s dat K aan één van de voorwaarden in de opgave voldoet. Onderstel dat K geen enkel element bevat dat toegevoegd is aan een cyclisch gereduceerd element van lengte minstens één. Stel dat de normaalvorm van k_i gegeven wordt door $(k_{i0}, t^{\varepsilon_{i1}}, k_{i1}, \dots, t^{\varepsilon_{in_i}}, k_{in_i})$, voor elke $i \in \{1, \dots, l\}$. Als $s = 0$, dan is elke n_i gelijk aan 0, zodat K bevat is in G . Onderstel dus dat $s > 0$, en beschouw een element k_i waarvoor $n_i > 0$. Als $n_i = 1$, dan is k_i cyclisch gereduceerd en volgt een contradictie. Onderstel dus dat $n_i \geq 2$, en dat $(t^{\varepsilon_{in_i}}, k_{in_i}k_{i0}, t^{\varepsilon_{i1}})$ niet gereduceerd is. Zoals in het bewijs van lemma 2.2.16 kunnen we k_i toevoegen met $c := (t^{\varepsilon_{in_i}}k_{in_i})^{-1}$ om een element $c^{-1}k_ic$ te verkrijgen waarvan de normaalvorm lengte $n_i - 2$ heeft. We zullen de inductiehypothese toepassen op de deelgroep $c^{-1}Kc$ van $G *_\phi$ voortgebracht door $\{c^{-1}k_1c, \dots, c^{-1}k_lc\}$. Het gestelde volgt dan ook voor K . Hiervoor volstaat het aan te tonen dat de lengte van $c^{-1}k_jc$ hoogstens deze van k_j is wanneer $j \neq i$. Nu is

$$c^{-1}k_jc = t^{\varepsilon_{in_i}}k_{in_i}k_{j0}t^{\varepsilon_{j1}}k_{j1} \dots t^{\varepsilon_{jn_j}}k_{jn_j}k_{in_i}^{-1}t^{-\varepsilon_{in_i}} \quad (4.1)$$

We zullen onderstellen dat $n_j > 0$. Als $n_j = 0$, dan blijft de strategie dezelfde. Als de rij $(t^{\varepsilon_{in_i}}, k_{in_i}k_{j0}, t^{\varepsilon_{j1}})$ niet gereduceerd is, dan kunnen we de laatste uitdrukking vereenvoudigen zodat de eerste twee factoren $t^{\pm 1}$ verdwijnen. Het gestelde volgt dan uit gevolg 2.2.7. Onderstel dus dat $(t^{\varepsilon_{in_i}}, k_{in_i}k_{j0}, t^{\varepsilon_{j1}})$ gereduceerd is. Omdat

$$k_ik_j = k_{i0}t^{\varepsilon_{i1}}k_{i1} \dots t^{\varepsilon_{in_i}}k_{in_i}k_{j0}t^{\varepsilon_{j1}}k_{j1} \dots t^{\varepsilon_{jn_j}}k_{jn_j} \in K$$

niet cyclisch gereduceerd is, kan de rij $(t^{\varepsilon_{jn_j}}, k_{jn_j}k_{i0}, t^{\varepsilon_{i1}})$ niet gereduceerd zijn. Nu is

$$t^{\varepsilon_{jn_j}}k_{jn_j}k_{in_i}^{-1}t^{-\varepsilon_{in_i}} = t^{\varepsilon_{jn_j}}k_{jn_j}k_{i0}t^{\varepsilon_{i1}}(t^{\varepsilon_{in_i}}k_{in_i}k_{i0}t^{\varepsilon_{i1}})^{-1}$$

zodat we de laatste twee factoren $t^{\pm 1}$ in vergelijking (4.1) kunnen laten verdwijnen. Opnieuw volgt het gestelde uit gevolg 2.2.7. $\square$

Merk op dat de voorgaande twee lemma's veralgemeningen zijn van respectievelijk gevolg 3.5.3 en gevolg 3.5.4.

Stelling 4.1.12. *Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A < G$ en $B < H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als K een eindig voortgebrachte deelgroep is van $G *_\phi H$ met de eigenschap dat $K \cap x^{-1}Ax = \{1\}$ voor elke $x \in G *_\phi H$, dan is*

$$K \cong S * \left(\underset{\alpha}{*} K_\alpha \right) * \left(\underset{\beta}{*} K_\beta \right)$$

*Hierbij is S een vrije groep, en elke K_α (respectievelijk K_β) is de intersectie van een deelgroep van K met een zekere toegevoegde van G (respectievelijk H) in $G *_\phi H$. Bovendien variëren de indices α en β over eindige verzamelingen, en het isomorfisme is canonisch op de deelgroepen K_α en K_β van K .*

Bewijs. We verwijzen hiervoor naar [14, Hoofdstuk 4, Stelling 6.6]. $\square$

Stelling 4.1.13. *Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als K een eindig voortgebrachte deelgroep is van $G *_\phi$ met de eigenschap dat $K \cap x^{-1}Ax = \{1\}$ voor elke $x \in G *_\phi$, dan is*

$$K \cong S * \left(\underset{\alpha}{*} K_\alpha \right)$$

Hierbij is S een vrije groep, en elke K_α is de intersectie van een deelgroep van K met een zekere toegevoegde van G in $G*_\phi$. Bovendien varieert α over een eindige verzameling, en het isomorfisme is canonisch op de deelgroepen K_α van K .

Bewijs. Als $K \leq x^{-1}Gx$ voor een zekere $x \in G*_\phi$, dan is het gestelde triviaal. Onderstel dus dat K niet bevat is in een toegevoegde van G . Het bewijs gaat per inductie op de rang $\text{rk}(K)$ van K . Als $\text{rk}(K) = 0$, dan is het gestelde opnieuw triviaal. Als $\text{rk}(K) = 1$, kies dan een voortbrengend element $k \in K$. Door gevolg 3.5.4 kan de orde van k niet eindig zijn, zodat $K \cong \mathbb{Z}$ een vrije groep is van rang één.

Stel nu dat $\text{rk}(K) > 1$. We tonen eerst aan dat het volstaat het gestelde te bewijzen voor een toegevoegde $L = x^{-1}Kx$ van K . Onderstel daarvoor dat we een isomorfisme $\chi : L \rightarrow S * (*_\alpha L_\alpha)$ gevonden hebben dat canonisch is op de deelgroepen L_α van L . Zij dan $K_\alpha := xL_\alpha x^{-1} \leq K$, en noteer het isomorfisme $K_\alpha \rightarrow L_\alpha$ dat we verkrijgen door toevoeging met x als ι_α , voor elke α . Merk op dat het vrij product $S * (*_\alpha K_\alpha)$ een boomproduct is, waarbij de toppen die overeenkomen met de groepen K_α verbonden zijn met een top die overeenkomt met S , en waarbij de geamalgameerde deelgroepen triviaal zijn. We breiden nu elke ι_α uit naar een morfisme

$$\iota_\alpha : K_\alpha \rightarrow L_\alpha \hookrightarrow S * (*_\alpha L_\alpha)$$

De voorwaarden van lemma 3.3.5 zijn nu triviaal voldaan, zodat we een morfisme

$$* \iota_\alpha : S * (*_\alpha K_\alpha) \rightarrow S * (*_\alpha L_\alpha)$$

krijgen dat canonisch is op S en voldoet aan $(* \iota_\alpha)(k'_\alpha) = \iota_\alpha(k_\alpha)$ voor elke $k_\alpha \in K_\alpha$. Analooog vinden we een morfisme

$$* \iota_\alpha^{-1} : S * (*_\alpha L_\alpha) \rightarrow S * (*_\alpha K_\alpha)$$

dat ook canonisch is op S , en waarvoor $(* \iota_\alpha^{-1})(l'_\alpha) = \iota_\alpha^{-1}(l_\alpha)$ voor elke $l_\alpha \in L_\alpha$. Men gaat makkelijk na dat $* \iota_\alpha$ en $* \iota_\alpha^{-1}$ elkaars inverse zijn op de factoren van de groepen $S * (*_\alpha L_\alpha)$ en $S * (*_\alpha K_\alpha)$, en bijgevolg ook globaal. Definieer vervolgens een morfisme $\psi : K \rightarrow S * (*_\alpha K_\alpha)$ aan de hand van het diagram

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\psi} & S * (*_\alpha K_\alpha) \\ \downarrow \iota & & \uparrow * \iota_\alpha^{-1} \\ L & \xrightarrow{\chi} & S * (*_\alpha L_\alpha) \end{array}$$

waarbij ι staat voor de toevoeging met x . Het is duidelijk dat ψ een isomorfisme is, en men verifieert ook eenvoudig dat ψ canonisch is op elke K_α .

Beschouw nu de bipolaire structuur $\{F, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}$ op $G*_\phi$ gegeven in voorbeeld 4.1.3. We tonen aan dat er een $x \in G*_\phi$ bestaat zodat $L = x^{-1}Kx$ een element y bevat waarvoor $y \in EE^* \cap L$. Uit lemma 4.1.11 volgt alvast dat we L zo kunnen kiezen dat het een cyclisch gereduceerd element y van lengte minstens één bevat. Het is dan duidelijk dat $y \notin E^*E^*$. Als $y \in E^*E$, dan is $y^{-1} \in EE^* \cap L$ en zijn we klaar. Onderstel dus dat $y \in EE$, en zij $y = y_0 t^{\varepsilon_1} y_1 \cdots t^{\varepsilon_n} y_n$ in normaalvorm. Door eventueel y toe te voegen kunnen we ervoor zorgen dat $y_0 = 1$, waarbij y nog altijd gereduceerd is. Als dit element niet in EE is bevat, dan zijn we opnieuw klaar. Indien dit wel zo is moet $\varepsilon_1 = -1$.

Als we y nu toevoegen met t^{-1} , dan blijft y gereduceerd en kunnen we ervoor zorgen dat $\varepsilon_n = -1$ en $y_n = 1$. Bijgevolg moet $y \in EE^*$. Kies nu L zo dat $EE^* \cap L \neq \emptyset$. We kunnen dan L uitrusten met de bipolaire structuur die we verkrijgen door de restrictie te nemen van de verzamelingen F en XY tot L . Het is duidelijk dat dit een partitie vormt van L , en men verifieert dat axioma's 1 – 5 worden overgeërfd van de originele bipolaire structuur. Axioma 6 volgt bovendien uit het voorgaande.

Uit stelling 4.1.9 weten we dat L isomorf is met ofwel een niet-triviaal geamalgameerd product, ofwel een HNN-extensie. Nu volgt uit $K \cap x^{-1}Ax = \{1\}$ voor elke $x \in G *_\phi$ dat $F \cap L = 1$. Als L een niet-triviaal geamalgameerd product is, dan is de geamalgameerde deelgroep triviaal, dus L is een vrij product. In het andere geval waarbij L een HNN-extensie is volgt opnieuw dat L een vrij product is van een zekere groep L_1 met $\mathbb{Z}$, en we mogen zonder verlies van algemeenheid onderstellen dat L_1 niet-triviaal is. Schrijf dus $L \cong L_1 * L_2$, waarbij zowel L_1 als L_2 niet-triviaal zijn. We mogen ook aannemen dat L_1 en L_2 deelgroepen zijn van L , en dat het isomorfisme $L \cong L_1 * L_2$ canonisch is op L_1 en L_2 . Inderdaad, indien dit niet zo is vervangen we L_1 en L_2 door de deelgroepen van L die hiermee overeenkomen. Door stelling 2.1.5 geldt dan nog altijd $L \cong L_1 * L_2$, en de bewering dat het isomorfisme canonisch is gaat men eenvoudig na. Door de Grushko-Neumann-stelling (3.5.6) geldt $\text{rk}(L_1), \text{rk}(L_2) < \text{rk}(L)$, waardoor we de inductiehypothese kunnen toepassen. Zij dus

$$\begin{aligned}\psi_1 : L_1 &\rightarrow S_1 * (*_{\alpha} L_{1,\alpha}) \\ \psi_2 : L_2 &\rightarrow S_2 * (*_{\beta} L_{2,\beta})\end{aligned}$$

isomorfismen die voldoen aan de voorwaarden in de opgave. Uit stelling 2.1.5 volgt het bestaan van een isomorfisme

$$\psi_1 * \psi_2 : L_1 * L_2 \rightarrow (S_1 * (*_{\alpha} L_{1,\alpha})) * (S_2 * (*_{\beta} L_{2,\beta}))$$

dat de morfismen ψ_1 en ψ_2 uitbreidt. Indien we $\psi_1 * \psi_2$ samenstellen met $L \rightarrow L_1 * L_2$, dan krijgen we een isomorfisme

$$\psi : L \rightarrow ((S_1 * (*_{\alpha} L_{1,\alpha})) * (S_2 * (*_{\beta} L_{2,\beta})))$$

Men gaat makkelijk na dat dit isomorfisme canonisch is op de deelgroepen $L_{1,\alpha}$ en $L_{2,\beta}$ van L . Nu volgt uit het derde punt van lemma 3.2.4 dat de volgorde waarin we vrije producten nemen niet uitmaakt: het resultaat is canonisch isomorf met elkaar. Ook is $(S_1 * S_2)$ een vrije groep als vrij product van twee vrije groepen, zodat de rechterkant van de bovenstaande vergelijking een decompositie is van L die de gewenste vorm heeft. Hiermee is het gestelde bewezen. $\square$

Gevolg 4.1.14. *Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als K een eindig voortgebrachte deelgroep is van $G *_\phi H$ met de eigenschap dat $K \cap x^{-1}Gx = \{1\}$ en $K \cap x^{-1}Hx = \{1\}$ voor elke $x \in G *_\phi H$, dan is K een vrije groep.*

Gevolg 4.1.15. *Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als K een eindig voortgebrachte deelgroep is van $G *_\phi$ met de eigenschap dat $K \cap x^{-1}Gx = \{1\}$ voor elke $x \in G *_\phi$, dan is K een vrije groep.*

De deelgroepen van geamalgameerde producten en HNN-extensies werden volledig gekarakteriseerd in [12] en [13]. We zullen deze resultaten samenvatten in de stellingen die volgen. De bewijzen hiervan zijn zeer technisch en laten we achterwege. Zowel in het geval van een geamalgameerd product als van een HNN-extensie zien we dat elke deelgroep een zekere veralgemeende fundamentele groep is (waarin Γ oneindig is) die moet voldoen aan bepaalde eigenschappen.

Stelling 4.1.16. *Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Elke deelgroep $K \leq G *_\phi H$ is isomorf met een veralgemeende fundamentele groep $*_{\Phi}^T G_v$ die voldoet aan*

1. *Elke G_v is gelijk aan de doorsnede van K met een toegevoegde van G of H .*
2. *Voor elke $e \in E(\Gamma)$ zijn A_e en B_e beiden gelijk aan de doorsnede van K met een toegevoegde van A , en ϕ_e is het identieke morfisme.*

Bovendien is het isomorfisme canonisch op de deelgroepen G_v van K .

Gevolg 4.1.17. *Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als K een willekeurige deelgroep is van $G *_\phi H$ met de eigenschap dat $K \cap x^{-1}Ax = \{1\}$ voor elke $x \in G *_\phi H$, dan is*

$$K \cong S * \left(\underset{x}{*} K \cap x^{-1}Gx \right) * \left(\underset{y}{*} K \cap y^{-1}Hy \right)$$

*Hierbij is S een vrije groep, en het isomorfisme is canonisch op de deelgroepen $K \cap x^{-1}Gx$ en $K \cap y^{-1}Hy$ van K . Bovendien variëren x en y over een zekere verzameling van representanten van de dubbele nevenklassen van respectievelijk $(G *_\phi H) \bmod (G, K)$ en $(G *_\phi H) \bmod (H, K)$.*

Schets van het bewijs. Uit stelling 4.1.16 weten we dat K een zekere veralgemeende fundamentele groep is, waarbij de geamalgameerde deelgroepen en de geassocieerde deelgroepen (de deelgroepen die we toegevoegd maken met HNN-extensies) van de vorm $K \cap x^{-1}Ax$ zijn. Omdat dit laatste triviaal moet zijn vereenvoudigt dit zich tot het volgende: de symbolen $\{t_e \mid e \in E(\Gamma) \setminus E(T)\}$ brengen een vrije groep S voort in K , terwijl de rest van K een veralgemeend boomproduct is met triviale geamalgameerde deelgroepen, dus een vrij product van de toppen van de boom. De uitspraak over de representanten van de dubbele nevenklassen vereist een meer gedetailleerde analyse en kennis over het bewijs van stelling 4.1.16. We gaan hier dus niet verder op in. $\square$

Het voorgaande gevolg vormt een versterking van stelling 4.1.12. De deelgroep K hoeft hier bijvoorbeeld niet noodzakelijk eindig voortgebracht te zijn, en indien dit wel zo is weten we uit stelling 3.5.6 dat het vrij product in de opgave een eindig aantal factoren heeft. We zullen het voorgaande gevolg, samen met zijn analogon voor HNN-extensies (4.1.19) later gebruiken in stelling 4.3.1.

Stelling 4.1.18. *Zij G een groep met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq G$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Elke deelgroep $K \leq G *_\phi$ is isomorf met een veralgemeende fundamentele groep $*_{\Phi}^T G_v$ die voldoet aan*

1. *Elke G_v is gelijk aan de doorsnede van K met een toegevoegde van G .*
2. *Voor elke $e \in E(T)$ zijn A_e en B_e ofwel beiden triviaal, ofwel beiden gelijk aan de doorsnede van K met een toegevoegde van A . Bovendien is $\phi_e = \text{id}_{A_e}$.*

3. Voor elke $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$ is A_e ofwel gelijk aan $G_{\alpha(e)}$, ofwel gelijk aan de doorsnede van K met een toegevoegde van A . Hetzelfde geldt voor B_e .

Bovendien is het isomorfisme canonisch op de deelgroepen G_v van K , en de doorsnede van K met een toegevoegde van G is ofwel triviaal, ofwel toegevoegd aan een zekere G_v .

Gevolg 4.1.19. Zij G, H twee groepen met deelgroepen $A \leq G$ en $B \leq H$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als K een willekeurige deelgroep is van $G *_{\phi}$ met de eigenschap dat $K \cap x^{-1}Ax = \{1\}$ voor elke $x \in G *_{\phi}$, dan is

$$K \cong S * \left(\bigstar_x K \cap x^{-1}Gx \right)$$

Hierbij is S een vrije groep, en het isomorfisme is canonisch op de deelgroepen $K \cap x^{-1}Gx$ van K . Bovendien is de doorsnede van K met een toegevoegde van G ofwel triviaal, ofwel toegevoegd aan een zekere factor van de bovenstaande decompositie.

Schets van het bewijs. We kunnen opnieuw de structuur van K gegeven in stelling 4.1.18 vereenvoudigen. Een geassocieerde deelgroep A_e is in dit geval ofwel triviaal, ofwel gelijk aan de top $G_{\alpha(e)}$. Indien ze triviaal is levert het symbool t_e een vrije factor $\mathbb{Z}$ op die we in S kunnen brengen. Beschouw nu de deelgraaf Γ' van Γ die enkel de bogen $e \in E(\Gamma) \setminus E(T)$ bevat waarvoor $A_e = G_{\alpha(e)} \neq \{1\}$. Men kan nu aantonen dat elke samenhangende component van Γ' een boom is, en dat K het vrij product is van alle symbolen t_e , samen met factoren G_v die representanten zijn van de samenhangende componenten van Γ' . Een niet-triviale doorsnede van K met een toegevoegde van G is dan nog altijd toegevoegd aan één van de representanten G_v , omdat alle toppen in een samenhangende component van Γ' toegevoegd zijn aan elkaar. $\square$

4.2 Uiteinden van groepen

We onderstellen in deze sectie telkens dat G een eindig voortgebrachte groep is, en S een eindige verzameling van generatoren van G . We noteren de Cayleygraaf van G met betrekking tot S als $\text{Cay}(G, S)$. Deze graaf heeft als toppenverzameling de elementen van G , en de bogen verbinden elke twee toppen $g, h \in G$ waarvoor geldt dat $h = gs$ voor een zekere $s \in S \cup S^{-1}$. Zoals in [22] beschouwen we de booleaanse algebra $\mathcal{A}(G)$ gedefinieerd op de verzameling van alle elementen van G . Deze algebra bestaat uit deelverzamelingen van X , met het symmetrisch verschil als optelling en de intersectie als vermenigvuldiging. In feite is $\mathcal{A}(G)$ een ring, maar men gebruikt doorgaans de benaming ‘booleaanse algebra’ in de verzamelingenleer. Merk op dat $\mathcal{A}(G)$ ook effectief gezien kan worden als een algebra omdat ze uitgerust kan worden met de triviale scalaire vermenigvuldiging van het veld $\text{GF}(2)$. We zullen vaak $\mathcal{A}(G)$ beschouwen als een verzameling van deelverzamelingen van de toppen van de graaf $\text{Cay}(G, S)$. We definiëren dan de rand δA van $A \in \mathcal{A}(G)$ als de verzameling van alle bogen van $\text{Cay}(G, S)$ waarvoor één eindpunt binnen A ligt, en een ander eindpunt buiten A . Verder stellen we

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{A \in \mathcal{A}(G) \mid |A| < \infty\} \\ \mathcal{Q} &= \{A \in \mathcal{A}(G) \mid |\delta A| < \infty\}\end{aligned}$$

Merk op dat $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Q}$ omdat G eindig voortgebracht is, en dus $\text{Cay}(G, S)$ lokaal eindig is (de graad van elke top is eindig). Men gaat makkelijk na dat $\mathcal{F}$ een ideaal is van $\mathcal{A}(G)$,

en $\mathcal{Q}$ een deelring. Bijgevolg kunnen we de ring $\mathcal{E} = \mathcal{Q}/\mathcal{F}$ definiëren. De definitie voor de uiteinden van de groep G die oorspronkelijk in [22] werd gebruikt is de volgende.

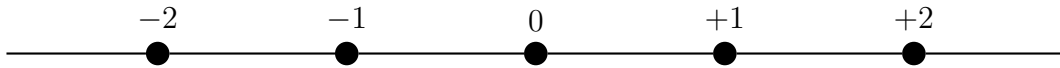
Definitie 4.2.1. De uiteinden van G met betrekking tot de verzameling generatoren S zijn de maximale idealen van $\mathcal{E}$.

Het is niet direct duidelijk wat de maximale idealen van $\mathcal{E}$ juist zijn. Om onze intuïtie hierover te versterken tonen we aan dat de uiteinden van $\mathcal{E}$ informeel gezegd overeenkomen met de verschillende paden in $\text{Cay}(G, S)$ die vanuit het eenheidselement naar oneindig lopen. Meer concreet zullen we de volgende stelling aantonen.

Stelling 4.2.2. *Het aantal uiteinden van G met betrekking tot S is gelijk aan de limiet voor $n \rightarrow \infty$ van het aantal onbegrensde samenhangende componenten van de graaf $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n)$.*

Het bewijs hiervan is eigen werk, alhoewel lemma's 4.2.7 en 4.2.8 verderop bekende resultaten zijn in de literatuur (zie bijvoorbeeld [9, Hoofdstuk 7]). In de bovenstaande stelling staat $B(n)$ voor de bal van straal n rond het eenheidselement in $\text{Cay}(G, S)$. Dit zijn alle toppen waarvoor er een pad van lengte kleiner dan n naar het eenheidselement bestaat. Het kan gebeuren dat het aantal onbegrensde samenhangende componenten van $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n)$ blijft stijgen zolang n groter wordt. In dit geval zal G oneindig veel uiteinden hebben. We zullen later stelling 4.2.2 gebruiken om aan te tonen dat het aantal uiteinden onafhankelijk is van de gekozen verzameling generatoren S , zolang S eindig is. We geven eerst een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 4.2.3. Zij $G = \mathbb{Z}$ de additieve groep van de gehele getallen. De Cayleygraaf van G met betrekking tot $S = \{+1\}$ wordt gegeven door

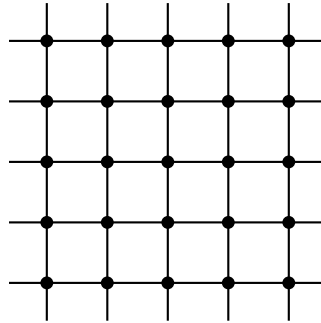


Indien we een bal uit de Cayleygraaf verwijderen van radius n krijgen we telkens twee samenhangende componenten, namelijk de twee uiteinden van de lijn. Volgens stelling 4.2.2 moet G juist twee uiteinden hebben. We gaan na dat dit klopt. Zij daarvoor $A \in \mathcal{Q}$ willekeurig. We kunnen A op unieke wijze uitbreiden tot een deelgraaf van $\text{Cay}(G, S)$ door alle bogen toe te voegen waarvoor beide eindpunten in A bevat zijn. Omdat δA eindig is, vinden we een $N \in \mathbb{N}$ zodat $\delta A \subseteq B(N)$. Nu ziet men in dat een samenhangende component van $\text{Cay}(G, S) \setminus B(N)$ ofwel volledig bevat is in A , ofwel disjunct is met A . We hebben dus in totaal vier mogelijkheden:

1. Beide componenten zijn disjunct met A : dan is $A \in \mathcal{F}$.
2. Enkel de linkercomponent is bevat in A .
3. Enkel de rechtercomponent is bevat in A .
4. Beide componenten zijn bevat in A : dan is $A = G$ op een eindige verzameling na.

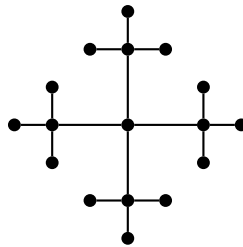
Men ziet makkelijk in dat elke mogelijkheid een uniek element van $\mathcal{E}$ bepaalt met als representant A , en dat omgekeerd elk element van $\mathcal{E}$ correspondeert met één van deze mogelijkheden. We stellen nu $\mathcal{E}$ voor als een ring met elementen $\{0, X, Y, 1\}$, waarbij X correspondeert met de linkerzijde van $\text{Cay}(G, S)$ en Y met de rechterzijde. Men verifieert dat de maximale idealen van $\mathcal{E}$ gegeven worden door $\{0, X\}$ en $\{0, Y\}$, wat inderdaad tot twee uiteinden leidt.

Voorbeeld 4.2.4. Zij $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ en $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$. De Cayleygraaf van G met betrekking tot S is een rooster:



Indien we een bal van straal n uit deze graaf verwijderen, dan blijft alles samenhangend. Dus het aantal uiteinden van G zou gelijk moeten zijn aan één. Analoog als in voorbeeld 4.2.3 verifieert men dat $\mathcal{E} = \{0, 1\}$ de triviale ring is met maar één maximaal ideaal, het triviale ideaal $\{0\}$.

Voorbeeld 4.2.5. Stel $G = F_2$ de vrije groep van rang twee, met $S = \{x, y\}$. De Cayleygraaf is in dit geval een 4-reguliere boom, die er als volgt uitziet.



Men ziet makkelijk in dat het aantal samenhangende componenten van $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n)$ gelijk is aan 4^n , voor elke $n \in \mathbb{N}$. Eens we stelling 4.2.2 aangetoond hebben volgt hier dus uit dat een vrije groep van rang twee oneindig veel uiteinden heeft. Meer algemeen heeft een vrije groep van rang n oneindig veel uiteinden, voor elke $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Als eerste stap in het bewijzen van stelling 4.2.2 kunnen we met de correspondentiestelling voor ringen de maximale idealen van $\mathcal{E}$ vertalen naar maximale idealen van $\mathcal{Q}$ die $\mathcal{F}$ bevatten.

Stelling 4.2.6. *Zij R een ring en $I \trianglelefteq R$ een ideaal van R . Het canonieke morfisme $\pi : R \rightarrow R/I$ induceert een ordebewarende bijectie tussen de idealen van R die I bevatten enerzijds en de idealen van R/I anderzijds.*

Bewijs. Dit resultaat wordt gegeven in de meeste inleidende boeken tot de algebra. Voor een bewijs hiervan verwijzen we bijvoorbeeld naar [19, Sectie 6.1, Propositie 6.1]. $\square$

Door de ordebewarendheid in de voorgaande stelling bestaat bovendien een bijectief verband tussen maximale idealen van R die I bevatten enerzijds, en maximale idealen van R/I anderzijds. Om stelling 4.2.2 te bewijzen kunnen we dus het aantal uiteinden van G vervangen door het aantal idealen van $\mathcal{Q}$ die $\mathcal{F}$ bevatten. Vervolgens karakteriseren we de (maximale) idealen van $\mathcal{Q}$.

Lemma 4.2.7. *Een deelverzameling $I \subseteq \mathcal{Q}$ is een ideaal van $\mathcal{Q}$ als en slechts als I voldoet aan de volgende eigenschappen.*

1. $\emptyset \in I$
2. $A \in I \wedge B \subseteq A, B \in \mathcal{Q} \implies B \in I$
3. $A, B \in I \implies A \cup B \in I$

Bewijs. Onderstel eerst dat $I \trianglelefteq \mathcal{Q}$. De eerste eigenschap uit de opgave volgt omdat $\emptyset$ het eenheidselement van het symmetrisch verschil is. Als $A \in I$ en $B \subseteq A$ met $B \in \mathcal{Q}$, dan is $B = B \cap A \in I$, waaruit de tweede eigenschap volgt. Zij nu $A, B \in I$. Dan volgt uit het voorgaande dat $A \setminus B \in I$, en bijgevolg ook $A \cup B = (A \setminus B) \triangle B \in I$. Als omgekeerd $I \subseteq \mathcal{Q}$ aan de drie eigenschappen uit de opgave voldoet, dan verifieert men makkelijk dat I een ideaal is. $\square$

Lemma 4.2.8. *Een ideaal $I \trianglelefteq \mathcal{Q}$ is een maximaal ideaal van $\mathcal{Q}$ als en slechts als voor elke $A \in \mathcal{Q}$ geldt dat ofwel $A \in I$, ofwel $A^c := G \setminus A \in I$.*

Bewijs. Als voor elke $A \in \mathcal{Q}$ geldt dat $A \in I$ of $A^c \in I$, dan is het duidelijk dat er geen ideaal J bestaat met $I \subsetneq J \subsetneq \mathcal{Q}$. Anders zou er immers een $A \in \mathcal{Q}$ bestaan waarvoor $A, A^c \in J$, zodat $G = A \triangle A^c \in J$. Onderstel omgekeerd dat I maximaal is, en stel voor een contradictie dat er een $A \in \mathcal{Q}$ bestaat zodat $A, A^c \notin I$. Definieer een nieuw ideaal J van $\mathcal{Q}$ door $J := \{B \in \mathcal{Q} \mid \exists C \in I : B \subseteq A \cup C\}$. Door gebruik te maken van lemma 4.2.7 gaat men na dat inderdaad $J \trianglelefteq \mathcal{Q}$. Omdat $A \in J$ geldt $I \subsetneq J$. Anderzijds zou uit $A^c \in J$ volgen dat $A^c \in I$. Dus moet $A^c \notin J$, zodat $J \subsetneq \mathcal{Q}$. We krijgen dus een contradictie door de maximaliteit van I . $\square$

Opmerking 4.2.9. De laatste twee lemma's vertonen een sterke gelijkenis met analoge resultaten voor filters en ultrafilters op een zekere verzameling. Dit is geen toeval: men kan namelijk een dualiteit aantonen tussen de idealen van een booleaanse algebra $\mathcal{A}$ op een verzameling X enerzijds, en de filters op X anderzijds. Meer bepaald geldt het volgende: als $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ een ideaal is, dan definieert $I^* := \{A \in \mathcal{A} \mid A^c \in I\}$ een filter op X . Omgekeerd bepaalt elke filter F op X een ideaal $F^* := \{A \in \mathcal{A} \mid A^c \in F\}$. Indien we ons beperken tot maximale idealen, dan is I^* het complement van I . Het complement van een maximaal ideaal van $\mathcal{A}$ is dan een ultrafilter van X , en omgekeerd geeft het complement van een ultrafilter ook een maximaal ideaal.

We construeren nu inductief een boom T als volgt. Deze boom zal een georiënteerde graaf zijn, waarbij geen inverse bogen voorkomen. Initieel bestaat T_0 uit één enkele top. Als T_n gedefinieerd is voor een bepaalde $n \in \mathbb{N}$, dan zullen de bladeren van T_n geassocieerd zijn met de onbegrensde samenhangende componenten van $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n)$. Beschouw nu een blad v van T_n , en zij C_v de corresponderende samenhangende component. Indien C_v splitst in meerdere onbegrensde componenten in $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n+1)$, dan voegen we aan T_n toppen toe corresponderend met elk van deze nieuwe componenten, en deze toppen verbinden we met een boog startend vanuit v . Als C_v niet splitst (of splitst in eindige componenten samen met één onbegrensde component), dan verbinden we slechts één nieuwe top met v . Dit proces doen we voor elk blad v van T_n , en de resulterende boom noemen we T_{n+1} . We stellen tenslotte T gelijk aan de unie van alle bomen T_n voor $n \in \mathbb{N}$.

Vervolgens definiëren we E als de verzameling van alle oneindige takken van T . Meer concreet is E de verzameling van functies $f : \mathbb{N} \rightarrow V(T)$ zodat voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $e \in E(T)$ bestaat waarvoor $f(n) = \alpha(e)$ en $f(n+1) = \omega(e)$. Merk op dat E eindig is als en slechts als het aantal onbegrensde samenhangende componenten van $\text{Cay}(G, S) \setminus$

$B(n)$ stabiliseert na een zekere waarde van n . In dit geval is ook het aantal van deze componenten gelijk aan de kardinaliteit van E . Om stelling 4.2.2 te bewijzen volstaat het dus het volgende aan te tonen.

Stelling 4.2.10. *Er bestaat een bijectie van E naar de verzameling van maximale idealen van $\mathcal{Q}$ die $\mathcal{F}$ bevatten.*

Bewijs. Zij $f \in E$ willekeurig. We construeren als volgt een maximaal ideaal $I_f \trianglelefteq \mathcal{Q}$. Als $A \in \mathcal{Q}$, dan bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zodat $\delta A \subseteq B(N)$. Beschouw nu de samenhangende component corresponderend met de top $f(N)$ van T . Deze is ofwel volledig bevat in A , ofwel disjunct met A . Indien ze disjunct is met A stellen we $A \in I_f$. Men ziet makkelijk in dat deze keuze onafhankelijk is van N , zolang $\delta A \subseteq B(N)$. De volgende beweringen zijn ook duidelijk:

1. Als $A \in \mathcal{F}$, dan $A \in I_f$.
2. Als $A \in I_f$ en $B \in \mathcal{Q}$ met $B \subseteq A$, dan ook $B \in I_f$.
3. Als $A, B \in I_f$, dan ook $A \cup B \in I_f$.
4. Als $A \in \mathcal{Q}$, dan ook $A^c \in \mathcal{Q}$, en juist één van deze verzamelingen is bevat in I_f .

Door lemma 4.2.7 en lemma 4.2.8 is I_f een maximaal ideaal van $\mathcal{Q}$, dat bovendien $\mathcal{F}$ bevat door de eerste eigenschap. We moeten nu aantonen dat de afbeelding $\theta : f \mapsto I_f$ een bijectie levert tussen E en de maximale idealen van $\mathcal{Q}$ die $\mathcal{F}$ bevatten. Onderstel dat $f, g \in E$ met $f \neq g$. Zij dan $n \in \mathbb{N}$ minimaal zodat $f(n) \neq g(n)$. Zij $A \in \mathcal{A}(G)$ de samenhangende component corresponderend met $f(n)$, beschouwd als deelverzameling van de toppen van $\text{Cay}(G, S)$. Dan bestaat δA enkel uit bogen die toppen van A verbinden met toppen van $B(n)$. Omdat $B(n)$ eindig is en $\text{Cay}(G, S)$ lokaal eindig, is ook δA eindig, dus $A \in \mathcal{Q}$. Nu is het duidelijk dat $A \in I_g$ maar $A \notin I_f$. Dus $I_f \neq I_g$, waaruit de injectiviteit van θ volgt. Zij nu $I \trianglelefteq \mathcal{Q}$ een willekeurig maximaal ideaal van $\mathcal{Q}$ dat $\mathcal{F}$ bevat. We construeren als volgt een $f \in E$. Beschouw voor een vaste $n \in \mathbb{N}$ de samenhangende componenten van de graaf $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n)$. Deze componenten zijn elk een element van $\mathcal{Q}$. Als ze elk een element zijn van I , dan zou $I = \mathcal{Q}$ omdat ook $B(n) \in \mathcal{F} \subseteq I$. We vinden dus minstens één component $C_n \notin I$ in $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n)$, en deze component is onbegrensd omdat $\mathcal{F} \subseteq I$. Maar C_n is eigenlijk uniek bepaald, want het complement van C_n is bevat in I zodat alle andere componenten bevat zijn in I . We stellen $f(n)$ gelijk aan de top van T die met C_n correspondeert. Dit herhalen we nu voor elke $n \in \mathbb{N}$. Omdat noodzakelijk $C_{n+1} \subseteq C_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, is $f \in E$. Voor de surjectiviteit van θ volstaat het aan te tonen dat $I_f = I$. Omdat I_f en I beiden maximaal zijn, volstaat het dat $I_f \subseteq I$. Maar dit is makkelijk in te zien: als $A \in I_f$, zij dan $n \in \mathbb{N}$ zodat $\delta A \subseteq B(n)$. Per definitie van I_f moet A disjunct zijn met de component corresponderend met $f(n)$, namelijk C_n . Dus moet A bevat zijn in het complement van C_n , zodat $A \in I$. $\square$

De volgende twee bewijzen zijn overgenomen uit [15, Hoofdstuk 11].

Lemma 4.2.11. *Het aantal uiteinden van G is onafhankelijk van de keuze van S .*

Bewijs. Onderstel dat T een andere eindige verzameling is van generatoren van G . Noteer met d_S en d_T de gebruikelijke afstandsmaten van respectievelijk $\text{Cay}(G, S)$ en $\text{Cay}(G, T)$. Dus $d_S(g, h)$ is de lengte van een kortste pad tussen g en h in de graaf $\text{Cay}(G, S)$, en analoog voor $d_T(g, h)$. We kunnen nu elk element van $T \cup T^{-1}$ schrijven als een product van elementen van $S \cup S^{-1}$. Zij λ_1 het maximum van de lengtes van deze producten. Dan

kunnen we elk woord van lengte n in $T \cup T^{-1}$ uitzetten tot een woord in $S \cup S^{-1}$ van lengte hoogstens $\lambda_1 n$. Hieruit volgt dat $d_S(g, h) \leq \lambda_1 d_T(g, h)$ voor alle $g, h \in G$. Analoog vinden we een λ_2 zodat $d_T(g, h) \leq \lambda_2 d_S(g, h)$ voor alle $g, h \in G$. Stellen we $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$, dan geldt dat $\lambda^{-1} d_S \leq d_T \leq \lambda d_S$. Zij nu $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. Noteer met $B_S(n)$ en $B_T(n)$ de bal van radius n in respectievelijk $\text{Cay}(G, S)$ en $\text{Cay}(G, T)$. We tonen aan dat het aantal onbegrensde samenhangende componenten van $\text{Cay}(G, S) \setminus B_S(\lambda n + \lambda^2)$ minstens dat van $\text{Cay}(G, T) \setminus B_T(n)$ is. Uit stelling 4.2.2 volgt dan dat het aantal uiteinden van G met betrekking tot S minstens het aantal uiteinden van G met betrekking tot T is. Het gestelde volgt dan door symmetrie. Kies representanten $g_1, \dots, g_k$ van de onbegrensde componenten van $\text{Cay}(G, S) \setminus B_S(\lambda n + \lambda^2)$, en zij $g \in G$ een willekeurige top bevat in één van de onbegrensde componenten van $\text{Cay}(G, T) \setminus B_T(n)$. Dan kunnen we een top h vinden in deze laatste component zodat $h \in \text{Cay}(G, S) \setminus B_S(\lambda n + \lambda^2)$. We weten dan dat h verbonden is met één van de toppen g_j door een pad in $\text{Cay}(G, S) \setminus B_S(\lambda n + \lambda^2)$. Onderstel dat $(v_0, \dots, v_m)$ zo'n pad is, met $v_0 = h$ en $v_m = g_j$. Het volstaat aan te tonen dat dit een pad induceert tussen h en g_j in $\text{Cay}(G, T) \setminus B_T(n)$. Uit $d_T(1, v_i) \geq \lambda^{-1} d_S(1, v_i)$ volgt nu dat elke $v_i \in G$ buiten $B_T(n + \lambda)$ ligt. Anderzijds is $d_T(v_i, v_{i+1}) \leq \lambda d_S(v_i, v_{i+1}) = \lambda$, en dus bestaat er een pad in $\text{Cay}(G, T) \setminus B_T(n)$ dat v_i verbindt met v_{i+1} . Hieruit volgt het gestelde. $\square$

Stelling 4.2.12 (Hopf-Freudenthal). *Als G meer dan twee uiteinden heeft, dan heeft G oneindig veel uiteinden.*

Bewijs. Onderstel voor een contradictie dat G een eindig aantal uiteinden k heeft, waarbij $k \geq 3$. Dan vinden we $n \in \mathbb{N}$ zodat $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n)$ juist k onbegrensde samenhangende componenten heeft. Nu kunnen we een $g \in G$ vinden zodat $d(1, g) \geq 2n$, want anders zou G eindig zijn, en dus nul uiteinden hebben. We kunnen er ook voor zorgen dat g bevat is in een onbegrensde samenhangende component van $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n)$, stel C . Beschouw dan de bal $gB(n)$ rond g . Omdat $d(1, g) \geq 2n$ is $B(n) \cap gB(n) = \emptyset$, zodat $gB(n) \subseteq C$. Aangezien de linkse vermenigvuldiging met een element van G een automorfisme is van $\text{Cay}(G, S)$, heeft $\text{Cay}(G, S) \setminus gB(n)$ eveneens k onbegrensde samenhangende componenten. Hieruit volgt dat C in $\text{Cay}(G, S) \setminus B(n)$ splitst in $k - 1 \geq 2$ onbegrensde samenhangende componenten indien we $gB(n)$ zouden verwijderen. We kunnen nu $N \in \mathbb{N}$ vinden zodat $B(n) \cup gB(n) \subseteq B(N)$, waardoor $\text{Cay}(G, S) \setminus B(N)$ minstens $2k - 2 > k$ onbegrensde samenhangende componenten heeft. Uit stelling 4.2.2 volgt een contradictie. $\square$

De bewijzen van de volgende twee lemma's zijn gebaseerd op dat van lemma 4.2.11.

Lemma 4.2.13. *Als $\theta : G \rightarrow H$ een surjectief groeps morfisme is met eindige kern, dan heeft H hetzelfde aantal uiteinden als G .*

Bewijs. Als $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ de verzameling generatoren is van G , dan wordt een verzameling generatoren van H gegeven door $T = \{\theta(s_1), \dots, \theta(s_k)\}$. Uit het feit dat θ een graafmorfisme induceert van $\text{Cay}(G, S)$ naar $\text{Cay}(H, T)$ volgt $d_T(\theta(g_1), \theta(g_2)) \leq d_S(g_1, g_2)$ voor alle $g_1, g_2 \in G$. Zij nu $N = \ker(\theta)$. Zij $g \in G$ willekeurig, en stel dat $\theta(g) = \theta(s_{i_1}) \cdots \theta(s_{i_m})$. Dan is $gs_{i_m}^{-1} \cdots s_{i_1}^{-1} = n \in N$. Nu kunnen we elke $n \in N$ schrijven als woord in $S \cup S^{-1}$. Stellen we λ gelijk aan de maximale lengte van elk van deze woorden, dan zien we dat $d_S(g_1, g_2) \leq d_T(\theta(g_1), \theta(g_2)) + \lambda$ voor alle $g_1, g_2 \in G$. Het vervolg van het bewijs gaat nu analoog als in lemma 4.2.11. Men toont aan dat elk pad in $\text{Cay}(G, S) \setminus B_S(n + \lambda)$ een pad in $\text{Cay}(H, T) \setminus B_T(n)$ induceert, waaruit volgt dat het aantal onbegrensde samenhangende componenten van $\text{Cay}(G, S) \setminus B_S(n + \lambda)$ minstens dat van $\text{Cay}(H, T) \setminus B_T(n)$ is. In de omgekeerde richting moeten we oppassen voor

een zekere subtiliteit. We kiezen zoals in lemma 4.2.11 representanten $\theta(g_1), \dots, \theta(g_k)$ voor de onbegrensde componenten van $\text{Cay}(H, T) \setminus B_T(n + \lambda)$. Zij g bevat in een onbegrensde component C van $\text{Cay}(G, S) \setminus B_S(n)$. Dan kunnen we een h uit C kiezen zodat $d_T(1, \theta(h)) \geq d_S(1, h) - \lambda \geq n + \lambda$. Dus $\theta(h)$ is bevat in een component van $\text{Cay}(H, T) \setminus B_T(n + \lambda)$, maar deze component moet onbegrensd zijn om te kunnen afleiden dat $\theta(h)$ verbonden is door een pad met een zekere $\theta(g_j)$. Dit volgt nu omdat de kern van θ eindig is, en uit het voorgaande bestaan er oneindig veel toppen $h' \in C$ waarvoor $\theta(h')$ verbonden is door een pad met $\theta(h)$ in $\text{Cay}(H, S) \setminus B_T(n + \lambda)$. Opnieuw induceert het pad tussen $\theta(h)$ en $\theta(g_j)$ in $\text{Cay}(H, T) \setminus B_T(n + \lambda)$ een pad tussen h en g_j in $\text{Cay}(G, S) \setminus B_S(n)$. We besluiten hiermee dat het aantal onbegrensde componenten van $\text{Cay}(H, T) \setminus B_T(n + \lambda)$ minstens dat van $\text{Cay}(G, S) \setminus B_S(n)$ is. Het gestelde volgt door de limiet $n \rightarrow \infty$ te nemen. $\square$

Gevolg 4.2.14. *Als $N \trianglelefteq G$ eindig is, dan heeft G/N hetzelfde aantal uiteinden als G .*

Bewijs. Pas het voorgaande lemma toe met $\theta : G \rightarrow G/N$ de canonieke surjectie. $\square$

Gevolg 4.2.15. *Als $G \cong H$, dan heeft G hetzelfde aantal uiteinden als H .*

Lemma 4.2.16. *Als $H \leq G$ met $[G : H]$ eindig, dan heeft H hetzelfde aantal uiteinden als G .*

Bewijs. Zij $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ een verzameling van generatoren van G en $\{g_1, \dots, g_m\}$ een verzameling van representanten van de rechter nevenklassen van H in G , met $g_1 = 1$. We tonen eerst aan dat H eindig voortgebracht is. Definieer daarvoor T als de verzameling van alle elementen van de vorm $g_i s_j g_k^{-1}$ die in H bevat zijn. Merk op dat voor elk paar i, j precies één zo'n k bestaat. Zij nu $h \in H$ willekeurig, en schrijf $h = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}$, met $l > 0$. Dan kunnen we dit omvormen tot $h = (g_{i_0} s_{i_1} g_{i_1}^{-1})(g_{i_1} s_{i_2} g_{i_2}^{-1}) \dots (g_{i_{l-1}} s_{i_l} g_{i_l}^{-1}) g_{i_l}$, waarbij $g_{i_0} = g_1 = 1$, en $g_{i_{j-1}} s_{i_j} g_{i_j}^{-1} \in H$ voor elke $j \in \{1, \dots, l\}$. Het is nu duidelijk dat $g_{i_l} = g_1 = 1$. Dus H wordt voortgebracht door T . Definieer vervolgens een afbeelding $f : G \rightarrow H : g_i h \mapsto h$. Zij d_S en d_T de afstandsmaten horende bij respectievelijk $\text{Cay}(G, S)$ en $\text{Cay}(H, T)$. Analoog als bij de berekening dat H voortgebracht wordt door T toont men aan dat $d_T(h, h') \leq d_S(hg_i, h'g_j)$ en $d_S(hg_i, h'g_j) \leq d_T(h, h') + 2\lambda$ voor alle $hg_i, h'g_j \in G$. Hierbij is λ zo gekozen dat we elke g_i kunnen schrijven als woord in $S \cup S^{-1}$ van lengte hoogstens λ . In het bijzonder beeldt f dus twee verbonden toppen in $\text{Cay}(G, S)$ af op twee verbonden (eventueel dezelfde) toppen in $\text{Cay}(H, T)$. Merk eveneens op dat f oneindige verzamelingen op oneindige verzamelingen afbeeldt. Het vervolg van het bewijs is nu helemaal analoog aan dat van lemma 4.2.13. $\square$

Opmerking 4.2.17. Uit het bovenstaande bewijs volgt een belangrijk resultaat dat we later nog zullen gebruiken: elke deelgroep H van eindige index in een eindig voortgebrachte groep G , is eindig voortgebracht. Ook het omgekeerde geldt, aangezien G wordt voortgebracht door de generatoren van H samen met de representanten van de rechter nevenklassen van H in G .

We richten ons nu op een karakterisatie van groepen met twee uiteinden in termen van geamalgameerde producten en HNN-extensies (stelling 4.2.23). We werken hiervoor in de ring $\mathcal{A}(G)$. Als $A, B \in \mathcal{A}(G)$, dan noteren we het symmetrisch verschil van A en B als $A + B$, en de intersectie noteren we soms met $A \cdot B$, of kortweg AB , indien we expliciet gebruik willen maken van de ringstructuur. We noteren de ledige verzameling als 0, en de verzameling G als 1. Dit zijn de neutrale elementen van respectievelijk het symmetrisch

verschil en de intersectie. Het complement van A wordt dan gegeven door $A^c := 1 + A$. Men kan de volgende twee bijkomende axioma's verifiëren:

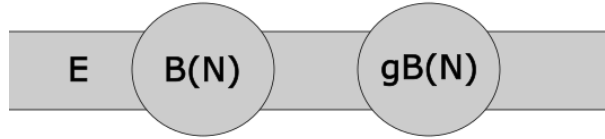
$$\begin{aligned} g(A + B) &= gA + gB & (\forall A, B \in \mathcal{A}(G), \forall g \in G) \\ g(AB) &= gA \cdot gB & (\forall A, B \in \mathcal{A}(G), \forall g \in G) \end{aligned}$$

Hierbij is gA de verzameling van elementen van G die bekomen wordt door linkse vermenigvuldiging van de elementen van A met g .

Onderstel voor het vervolg dat G een eindig voortgebrachte groep is met twee uiteinden. De volgende drie lemma's zijn afkomstig uit [15, Hoofdstuk 11]. Het bewijs van het eerste lemma wordt daar niet gegeven en is hier zelf uitgewerkt. Zij S een eindige verzameling van generatoren van G , en zij $N \in \mathbb{N}$ zo groot dat $\text{Cay}(G, S) \setminus B(N)$ twee onbegrensde samenhangende componenten heeft. Kies nu één van deze twee samenhangende componenten en noteer deze als E .

Lemma 4.2.18. *Voor elke $g \in G$ geldt ofwel dat $E + gE$ eindig is, ofwel dat zijn complement $(E + gE)^c$ eindig is.*

Bewijs. Uit het feit dat linkse vermenigvuldiging met g een automorfisme is van $\text{Cay}(G, S)$ volgt dat $\text{Cay}(G, S) \setminus gB(N)$ juist twee onbegrensde samenhangende componenten heeft, en dat gE gelijk is aan één van deze twee componenten. Het gestelde volgt nu in feite uit de onderstaande figuur: ofwel komt gE overeen met het uiteinde van $\text{Cay}(G, S)$ tegen-



overgesteld aan dat van E , ofwel zijn de uiteindes corresponderend met E en gE dezelfde. In het eerste geval is $(E + gE)^c$ gelijk aan de unie van de ballen $B(N)$ en $gB(N)$ samen met het gedeelte ertussen, wat eindig is. In het tweede geval is $E + gE$ gelijk aan $B(N)$ en het gedeelte tussen $B(N)$ en $gB(N)$. Merk op dat de figuur niet alle mogelijke gevallen weergeeft. Het kan bijvoorbeeld ook zijn dat $gB(N)$ bevat is in E . Maar in dit geval gaat men analoog het gestelde na. Ook het feit dat $B(N)$ en $gB(N)$ niet noodzakelijk disjunct hoeven te zijn veroorzaakt geen problemen. $\square$

We definiëren nu $H := \{g \in G \mid |E + gE| < \infty\} \subseteq G$.

Lemma 4.2.19. *De verzameling H vormt een deelgroep van G van index hoogstens twee. In het bijzonder is dus $H \trianglelefteq G$.*

Bewijs. Het is duidelijk dat $1 \in H$. Onderstel dat $g, h \in H$. Dan is

$$|E + g^{-1}E| = |g^{-1}(gE + E)| = |gE + E| = |E + gE| < \infty$$

zodat $g^{-1} \in H$, en

$$\begin{aligned} |E + ghE| &= |E + gE + gE + ghE| \\ &\leq |E + gE| + |gE + ghE| \\ &= |E + gE| + |E + hE| < \infty \end{aligned}$$

waaruit ook $gh \in H$. Dus H is een deelgroep van G . Zij nu $\{g_1H, \dots, g_nH\}$ de verzameling van linkse nevenklassen van H in G , waarbij $g_1 = 1$. Onderstel voor een contradictie dat $n \geq 2$. Dan zijn $g_{n-1}, g_n^{-1} \in G \setminus H$, zodat

$$\begin{aligned} |E + g_{n-1}g_n^{-1}E| &= |(1 + E + g_{n-1}E) + (1 + g_{n-1}E + g_{n-1}g_n^{-1}E)| \\ &\leq |(E + g_{n-1}E)^c| + |g_{n-1}(E + g_n^{-1}E)^c| < \infty \end{aligned}$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het feit dat $g_{n-1} \cdot 1 = 1$, en van lemma 4.2.18 waaruit volgt dat $(E + g_{n-1}E)^c$ en $(E + g_n^{-1}E)^c$ eindig zijn. Dus $g_{n-1}g_n^{-1} \in H$, zodat $g_{n-1}H = g_nH$, een strijdigheid. $\square$

Omdat G twee uiteinden heeft weten we dat G een oneindige groep is. Uit het voorgaande lemma volgt dus dat H een oneindige deelgroep is van G . In het bijzonder bestaat er een $g \in H$ waarvoor geldt dat $B(N) \cap gB(N) = \emptyset$.

Lemma 4.2.20. *Als $g \in H$ voldoet aan $B(N) \cap gB(N) = \emptyset$, dan is één van de volgende twee uitspraken waar:*

1. $E \setminus gE = \emptyset$ en $gE \setminus E \neq \emptyset$
2. $E \setminus gE \neq \emptyset$ en $gE \setminus E = \emptyset$

Bewijs. Dit volgt opnieuw uit de figuur in lemma 4.2.18. In het geval dat $gB(N)$ rechts van $B(N)$ ligt zoals op de figuur, dan moet gE de component zijn links van $gB(N)$ en geldt de eerste uitspraak. In het geval dat $gB(N)$ links van $B(N)$ ligt (dus bevat is in E) volgt analoog dat de tweede uitspraak geldig is. $\square$

Om stelling 4.2.22 te bewijzen hebben we nog het volgende elementaire lemma nodig.

Lemma 4.2.21. *Zij $D_\infty = \langle s, r \mid s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle$ de oneindige diëdergroep. Dan is $D_\infty \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Bewijs. Zij x en y de niet-triviale elementen van de factoren van $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Definieer

$$\phi : \begin{cases} x \mapsto rs \\ y \mapsto s \end{cases} \qquad \psi : \begin{cases} r \mapsto xy \\ s \mapsto y \end{cases}$$

Door de substitutietest breiden ϕ en ψ uit tot morfismen, en door hun actie op generatoren te beschouwen volgt dat ze elkaars inverse zijn. $\square$

Gebruik makend van de voorgaande lemma's zullen we het volgende resultaat aantonen. Het eerste deel van het bewijs is terug te vinden in [15, Stelling 11.33]. De stelling wordt ook geformuleerd in [22, Stelling 4.A.6.5], maar is niet volledig uitgewerkt in dit artikel. We vullen dit hier aan.

Stelling 4.2.22. *Er bestaat een eindige normaaldeler $M \trianglelefteq G$ zodat ofwel $G/M \cong \mathbb{Z}$, ofwel $G/M \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

Bewijs. Als $g \in H$, dan weten we dat $|E + gE| < \infty$. Omdat $E \setminus gE \subseteq E + gE$ en $gE \setminus E \subseteq E + gE$ geldt ook dat

$$\begin{aligned} |E \cap gE^c| &= |E \setminus gE| < \infty \\ |gE \cap E^c| &= |gE \setminus E| < \infty \end{aligned}$$

We definiëren nu een afbeelding $\phi : H \rightarrow \mathbb{Z}$ door

$$\phi(g) = |E \setminus gE| - |gE \setminus E|$$

Zij $g, h \in H$. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} \phi(g) &= |E \cap gE^c| - |gE \cap E^c| \\ &= |E \cap gE^c \cap ghE| + |E \cap gE^c \cap ghE^c| \\ &\quad - |gE \cap E^c \cap ghE| - |gE \cap E^c \cap ghE^c| \end{aligned}$$

Analoog krijgen we

$$\begin{aligned} \phi(h) &= |E \cap hE^c| - |hE \cap E^c| \\ &= |gE \cap ghE^c| - |ghE \cap gE^c| \\ &= |gE \cap ghE^c \cap E| + |gE \cap ghE^c \cap E^c| \\ &\quad - |ghE \cap gE^c \cap E| - |ghE \cap gE^c \cap E^c| \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \phi(gh) &= |E \cap ghE^c| - |ghE \cap E^c| \\ &= |E \cap ghE^c \cap gE| + |E \cap ghE^c \cap gE^c| \\ &\quad - |ghE \cap E^c \cap gE| - |ghE \cap E^c \cap gE^c| \end{aligned}$$

Uit de voorgaande drie berekeningen vinden we dat $\phi(gh) = \phi(g) + \phi(h)$. Het is duidelijk dat $\phi(1) = 0$, zodat ϕ een morfisme is. Bovendien volgt uit lemma 4.2.20 dat $\phi(g) \neq 0$ als $B(N) \cap gB(N) = \emptyset$, wat voldaan is wanneer $g \notin B(2N)$. Dus $M := \ker(\phi) \subseteq B(2N)$ is eindig. Indien $H = G$, dan geldt $G/M \cong \mathbb{Z}$, want $\text{im}(\phi)$ is een niet-triviale deelgroep van $\mathbb{Z}$.

Onderstel dus dat $[G : H] = 2$. Het volgende deel van het bewijs is eigen werk. We tonen eerst aan dat $g^2 \in M$ voor elke $g \in G \setminus H$. Zij dus $g \in G \setminus H$ willekeurig. Merk op dat $g^2 \in H$. We moeten dus enkel nagaan dat

$$\phi(g^2) = |E \cap g^2E^c| - |g^2E \cap E^c| = 0$$

Men ziet makkelijk in dat $E \cap gE \subseteq (E + gE)^c$ en $E^c \cap gE^c \subseteq (E + gE)^c$. Uit lemma 4.2.18 volgt dan dat

$$\begin{aligned} |E \cap gE| &< \infty \\ |E^c \cap gE^c| &< \infty \end{aligned}$$

We berekenen

$$\begin{aligned} |E \cap g^2E^c| &= |E \cap g^2E^c \cap gE| + |E \cap g^2E^c \cap gE^c| \\ &= |E \cap gE| - |E \cap g^2E \cap gE| + |g^2E^c \cap gE^c| - |E^c \cap g^2E^c \cap gE^c| \\ |g^2E \cap E^c| &= |g^2E \cap E^c \cap gE| + |g^2E \cap E^c \cap gE^c| \\ &= |g^2E \cap gE| - |g^2E \cap E \cap gE| + |E^c \cap gE^c| - |g^2E^c \cap E^c \cap gE^c| \end{aligned}$$

zodat inderdaad $\phi(g^2) = 0$. Uit $g^2 \in M$ voor elke $g \in G \setminus H$ volgt ook dat $M \trianglelefteq G$: voor elke $m \in M$ en $g \in G \setminus H$ bestaat $m' \in M$ zodat

$$g^{-1}mg = gm'g = (gm')^2(m')^{-1} \in M$$

Omdat $H/M \cong \mathbb{Z}$ vinden we een $y \in H$ zodat

$$H = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} y^k M$$

Dan geldt $gygM = y^{-1}M$ voor elke $g \in G \setminus H$, want $gy \in G \setminus H$ zodat $gygy = (gy)^2 \in M$. Zij nu $g \in G \setminus H$ een vast gekozen element. Dan kunnen we elk element van G/M op unieke wijze schrijven als $g^\varepsilon y^k M$, met $\varepsilon \in \{0, 1\}$ en $k \in \mathbb{Z}$. Definieer nu

$$\phi : G/M \rightarrow D_\infty : g^\varepsilon y^k M \mapsto s^\varepsilon r^k$$

Om aan te tonen dat ϕ een morfisme is moeten we nagaan dat

$$\phi(g^{\varepsilon_1} y^{k_1} g^{\varepsilon_2} y^{k_2} M) = \phi(g^{\varepsilon_1} y^{k_1} M) \phi(g^{\varepsilon_2} y^{k_2} M) = s^{\varepsilon_1} r^{k_1} s^{\varepsilon_2} r^{k_2} \quad (4.2)$$

Stel bijvoorbeeld dat $\varepsilon_1 = 0$ en $\varepsilon_2 = 1$. De andere gevallen zijn analoog. Dan kunnen we $s^{\varepsilon_1} r^{k_1} s^{\varepsilon_2} r^{k_2}$ herschrijven als $s r^{k_2 - k_1}$. Maar uit de relaties $gygM = y^{-1}M$ en $g^2 M = M$ halen we ook dat $g^{\varepsilon_1} y^{k_1} g^{\varepsilon_2} y^{k_2} M = gy^{k_2 - k_1} M$. Hieruit volgt (4.2). Omgekeerd induceert

$$\psi : \{s, r\} \rightarrow G/M : \begin{cases} s \mapsto g \\ r \mapsto y \end{cases}$$

een morfisme door de substitutietest. Door de actie van ϕ en ψ op generatoren te beschouwen volgt dat deze morfismen elkaars inverse zijn, dus ϕ is een isomorfisme. Het gestelde volgt nu uit lemma 4.2.21. $\square$

De volgende stelling wordt in [22] als vanzelfsprekend beschouwd. Het bewijs is deels overgenomen van [3, Stelling 6.10].

Stelling 4.2.23. *Zij G een eindig voortgebrachte groep. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

1. G heeft twee uiteinden.
2. Er bestaat een eindige normaaldeler $N \trianglelefteq G$ zodat ofwel $G/N \cong \mathbb{Z}$, ofwel $G/N \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
3. G heeft één van de volgende gedaanten.
 - $G \cong G_1 *_\phi G_2$ met G_1 en G_2 eindig, $\phi : A \rightarrow B$ en $[G_1 : A] = [G_2 : B] = 2$.
 - $G \cong G_1 *_\phi$ met G_1 eindig en $\phi : G_1 \rightarrow G_1$.

Bewijs. De implicatie (1) $\implies$ (2) volgt uit de voorgaande stelling. Onderstel omgekeerd dat (2) geldt. Als $G/N \cong \mathbb{Z}$, dan weten we uit gevolg 4.2.14 en gevolg 4.2.15 dat G hetzelfde aantal uiteinden heeft als $\mathbb{Z}$, dus twee (zie voorbeeld 4.2.3). In het andere geval is het aantal uiteinden van G gelijk aan dat van $H := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Als x en y de niet-triviale elementen zijn uit de factoren van H , dan ziet men makkelijk in dat de deelgroep voortgebracht door xy eindige index heeft in H , en isomorf is met $\mathbb{Z}$. Dit volgt in feite uit de normaalvorm (stelling 2.1.7): elk element van H kan op unieke wijze geschreven worden als een alternerend product van factoren x en y . Door lemma 4.2.16 en gevolg 4.2.15 heeft H twee uiteinden.

We tonen nu (3) aan, uitgaande van (2). Onderstel eerst dat er een isomorfisme $\chi : G/N \rightarrow H := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ bestaat. Zij x, y de niet-triviale elementen in de

factoren van H , en stel $gN = \chi^{-1}(x)$ en $hN = \chi^{-1}(y)$. Omdat $x^2 = y^2 = 1$ geldt dat $g^2, h^2 \in N$. Aangezien $N \trianglelefteq G$ zijn $G_1 := N \cup gN$ en $G_2 := N \cup hN$ deelgroepen van G . Door lemma 2.1.4 breiden de inclusies $G_1 \rightarrow G$ en $G_2 \rightarrow G$ uit tot een morfisme $\psi : G_1 *_\phi G_2 \rightarrow G$, waarbij $\phi = \text{id}_N$. Dat ψ surjectief is volgt uit het feit dat G gegenereerd wordt door G_1 en G_2 : als $f \in G$, dan kunnen we $\chi(fN)$ schrijven als woord in $x^{\pm 1}$ en $y^{\pm 1}$. Dus f kan geschreven worden als woord in $g^{\pm 1}, h^{\pm 1}$, en elementen uit N .

Zij nu omgekeerd $f \in G_1 *_\phi G_2$ willekeurig, en zij $f = f'_0 \cdots f'_n$ in normaalvorm. We kiezen de representanten van de rechter nevenklassen van N in G_1 en G_2 die gebruikt worden in de normaalvorm van f respectievelijk als $\{1, g\}$ en $\{1, h\}$. Onderstel dat $f \neq 1$. We tonen aan dat ook $\psi(f) \neq 1$, waaruit de injectiviteit van ψ volgt. Als $f \in G'_1 \cup G'_2$, dan is het gestelde triviaal. Onderstel dus dat $n \geq 2$, en stel voor een contradictie dat $\psi(f) = f_0 \cdots f_n = 1$ in G . Dan is $f_1 \cdots f_n N = N$ in G/N , en dus $\chi(f_1 \cdots f_n N) = 1$ in H . Maar $\chi(f_1 \cdots f_n N)$ bestaat uit een product van alternerend x en y van lengte minstens één, wat een strijdigheid geeft.

Stel nu dat er een isomorfisme $\chi : G/N \rightarrow \mathbb{Z}$ bestaat. Dan stellen we $G_1 := N$, en we kiezen $k \in G$ zo dat $\chi(kN) = 1$. Aangezien $G_1 \trianglelefteq G$ vormt de toevoeging met k een automorfisme ϕ van G_1 . Door lemma 2.2.2 breidt de inclusie $G_1 \rightarrow G$ uit tot een morfisme $\Psi : G_1 *_\phi \rightarrow G$ waarvoor $\Psi(t) = k$. Opnieuw volgt de surjectiviteit van Ψ uit het feit dat G voortgebracht wordt door k en de elementen van N . De injectiviteit gaat men na analoog als in het voorgaande geval.

Onderstel omgekeerd dat (3) geldt. We tonen (2) aan. Beschouw eerst het geval waarbij $G \cong G_1 *_\phi$. Zonder verlies van algemeenheid onderstellen we dat $G = G_1 *_\phi$. Uit gevolg 2.2.10 volgt dat $G/\langle\langle G_1 \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}$. Aangezien G_1 eindig is volstaat het aan te tonen dat $G_1 \trianglelefteq G$. Maar dit volgt uit $t^{-1}G_1 t = G_1$.

Beschouw nu het andere geval waar $G = G_1 *_\phi G_2$. Omdat $[G_1 : A] = [G_2 : B] = 2$ zijn A en B normaal in respectievelijk G_1 en G_2 . Bijgevolg is $A' = B'$ een normale deelgroep van G , die bovendien eindig is. Het volstaat in te zien dat

$$G/A' \cong (G_1/A) * (G_2/B) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

Het laatste isomorfisme is duidelijk. Voor het eerste isomorfisme gaat men eenvoudig na dat de canonische morfismen $G_1/A \rightarrow G/A' : g_1 A \mapsto g'_1 A'$ en $G_2/B \rightarrow G/A' : g_2 B \mapsto g'_2 A'$ goed gedefinieerd zijn, en bijgevolg een morfisme

$$\psi : (G_1/A) * (G_2/B) \rightarrow G/A'$$

induceren door lemma 2.1.4. Anderzijds kunnen we de canonieke morfismen $G_1 \rightarrow G_1/A$ en $G_2 \rightarrow G_2/B$ uitbreiden tot morfismen die eindigen in $(G_1/A) * (G_2/B)$, en dit induceert een morfisme $\chi : G \rightarrow (G_1/A) * (G_2/B)$. Het is makkelijk in te zien dat $A' \leq \ker(\chi)$, zodat χ op zijn beurt een morfisme

$$\bar{\chi} : G/A' \rightarrow (G_1/A) * (G_2/B)$$

induceert door de eerste isomorfiestelling. Men rekent nu na dat

$$\begin{aligned} (\psi \circ \bar{\chi})(gA') &= gA' & (\forall g \in G'_1 \cup G'_2) \\ (\bar{\chi} \circ \psi)(g_1 A) &= g_1 A & (\forall g_1 \in G_1) \\ (\bar{\chi} \circ \psi)(g_2 B) &= g_2 B & (\forall g_2 \in G_2) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat ψ en $\bar{\chi}$ elkaars inverse zijn, waarmee het bewijs is afgerond. $\square$

In [22, Sectie 5] wordt ook een karakterisatie gegeven van groepen met oneindig veel uiteinden. We vatten dit resultaat samen in stelling 4.2.25. Het bewijs hiervan zou verschillende pagina's in beslag nemen, waardoor we het achterwege laten. In het bijzonder zouden we hiervoor stelling 4.1.9 moeten aanpassen aan de originele definitie van een bipolaire structuur die gebruikt wordt in [22]. Onderstel dat een groep G een bipolaire structuur $\{F, S, EE, EE^*, E^*E, E^*E^*\}$ heeft in de zin van [22]. Als $S = \emptyset$, dan heeft G ook een bipolaire structuur zoals we het hier definiëren. We moeten dus enkel het geval $S \neq \emptyset$ beschouwen. In dit geval kan men aantonen dat G opnieuw isomorf is met een geamalgameerd product, maar het is niet meer geldig dat de bipolaire structuur zich vertaalt in één van deze gegeven in voorbeeld 4.1.2 en voorbeeld 4.1.3. In het bijzonder kan G een triviaal geamalgameerd product zijn. Het volgende lemma werd ook bewezen in [22], en speelt een cruciale rol in het bewijs van stelling 4.2.25.

Lemma 4.2.24. *Een eindig voortgebrachte groep G heeft meer dan één uiteinde als en slechts als G kan uitgerust worden met een bipolaire structuur (in de zin van [22]).*

Merk op dat dit resultaat ook geldt voor onze definitie van een bipolaire structuur, indien we stelling 4.2.23 en stelling 4.2.25 aannemen. Inderdaad, uit deze twee karakterisaties volgt dat G meer dan één uiteinde heeft als en slechts als G een niet-triviaal geamalgameerd product of een HNN-extensie is. Het gestelde zou dan volgen uit voorbeeld 4.1.2, voorbeeld 4.1.3 en stelling 4.1.9.

Stelling 4.2.25. *Zij G een eindig voortgebrachte groep. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

1. G heeft oneindig veel uiteinden.
2. G heeft één van de volgende gedaanten.
 - $G \cong G_1 *_\phi G_2$ met $\phi : A \rightarrow B$, $A < G_1$, $B < G_2$, $\max([G_1 : A], [G_2 : B]) > 2$, A en B eindig
 - $G \cong G_1 *_\phi$ met $\phi : A \rightarrow A$, $A < G_1$ eindig

4.3 Applicaties

In deze sectie tonen we de volgende stelling aan. Het bewijs hiervan is afkomstig uit [11], en gebruikt alles wat we tot nu toe gezien hebben over geamalgameerde producten en HNN-extensies. Met dit resultaat brengen we het verhaal tot een einde.

Stelling 4.3.1. *Zij G een eindig voortgebrachte groep. Dan is G een eindige extensie van een vrije groep als en slechts als G isomorf is met een fundamentele groep $*_{\Phi}^T G_v$, waarbij elke top van Γ correspondeert met een eindige groep.*

Onderstel eerst dat G een eindige extensie is van een vrije groep F . Dit betekent dat $F \trianglelefteq G$ en dat G/F eindig is. Door opmerking 4.2.17 is F eindig voortgebracht. We werken nu verder per inductie op $\text{rk}(F)$. Als $\text{rk}(F) = 0$, dan is G eindig. In dit geval is het gestelde triviaal: we kiezen Γ als de graaf die juist één top bevat, en deze top laten we corresponderen met G . Als $\text{rk}(F) = 1$, dan weten we uit voorbeeld 4.2.3 en gevolg 4.2.14 dat G twee uiteinden heeft. We gebruiken nu stelling 4.2.23. Als G van de vorm $G_1 *_\phi G_2$ is met G_1 en G_2 eindig, dan kiezen we Γ als de graaf met twee toppen corresponderend

met G_1 en G_2 , verbonden door een boog corresponderend met ϕ . Dat de fundamentele groep die we hierdoor bekomen isomorf is met G volgt dan uit de resultaten van hoofdstuk 2. Als G van de vorm $G_1 *_\phi$ is met G_1 eindig, dan kiezen we Γ een zelflus, waarbij de top correspondeert met G_1 en de boog met ϕ .

Onderstel nu dat $\text{rk}(F) \geq 2$. Door voorbeeld 4.2.4 en gevolg 4.2.14 heeft G oneindig veel uiteinden. Door stelling 4.2.25 volstaat het de volgende twee lemma's aan te tonen:

Lemma 4.3.2. *Onderstel dat $G \cong G_1 *_\phi G_2$, waarbij $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme is met A en B eindig. Dan is G isomorf met een fundamentele groep die voldoet aan de voorwaarden van stelling 4.3.1.*

Lemma 4.3.3. *Onderstel dat $G \cong G_1 *_\phi$, waarbij $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme is met A en B eindig. Dan is G isomorf met een fundamentele groep die voldoet aan de voorwaarden van stelling 4.3.1.*

We geven eerst een idee van hoe het bewijs van lemma 4.3.2 in zijn werk gaat. We zullen aantonen dat G_1 en G_2 eindig voortgebrachte, eindige extensies van vrije groepen zijn, zodat we de inductiehypothese op G_1 en G_2 kunnen toepassen. Dan zijn G_1 en G_2 isomorf met fundamentele groepen corresponderend met zekere grafen Γ_1 en Γ_2 . We tonen dan aan dat $G_1 *_\phi G_2$ een fundamentele groep is die correspondeert met een graaf Γ die bekomen wordt door Γ_1 en Γ_2 te verbinden door een boog. Merk op dat dit intuïtief duidelijk is indien A en B bevat zijn in een top van respectievelijk Γ_1 en Γ_2 . Inderdaad, in dit geval kunnen we de boog die Γ_1 en Γ_2 verbindt zo kiezen dat ze A en B identificeert.

In het geval van lemma 4.3.3 bekomen we de graaf Γ door een boog toe te voegen die twee toppen van Γ_1 verbindt. We tonen enkel aan hoe men lemma 4.3.2 formeel bewijst, aangezien het bewijs van lemma 4.3.3 analoog is. Neem dus de hypothese van lemma 4.3.2 aan. Zonder verlies van algemeenheid mogen we onderstellen dat $G = G_1 *_\phi G_2$. Als G_1 en G_2 eindig zijn, dan volgt het gestelde uit het voorgaande. Stel dus dat G_1 oneindig is.

Lemma 4.3.4. *G_1 en G_2 zijn eindig voortgebrachte, eindige extensies van vrije groepen.*

Bewijs. Omdat F een vrije groep is moet de intersectie van F met elke toegevoegde van A in $G_1 *_\phi G_2$ triviaal zijn: elk element in een toegevoegde van A heeft eindige orde, terwijl een niet-triviaal element van F oneindige orde heeft. Door gevolg 4.1.17 is

$$F \cong S * \left(\bigstar_x F \cap x^{-1}G_1x \right) * \left(\bigstar_y F \cap y^{-1}G_2y \right)$$

waarbij x en y variëren over een zekere verzameling van representanten van de dubbele nevenklassen van respectievelijk $(G_1 *_\phi G_2) \bmod (G_1, F)$ en $(G_1 *_\phi G_2) \bmod (G_2, F)$. Kies nu x en y zo dat het eenheidselement bevat is in G_1xF en G_2yF . Dan zijn de factoren $F \cap x^{-1}G_1x$ en $F \cap y^{-1}G_2y$ toegevoegd aan respectievelijk $F \cap G_1$ en $F \cap G_2$. Uit de Grushko-Neumann-stelling (3.5.6) volgt dat $\text{rk}(F \cap G_1), \text{rk}(F \cap G_2) \leq \text{rk}(F)$. We beweren nu dat de voorgaande ongelijkheid in feite een strikte ongelijkheid is. Hiervoor volstaat het om aan te tonen dat $1 < F \cap G_1^* < F$, waarbij $G_1^* := x^{-1}G_1x$. Als $F \cap G_1^* = F$, dan zou

$$[G : G_1] = [G : G_1^*] \leq [G : F \cap G_1^*] = [G : F] < \infty$$

Maar uit de structuur van de normaalvorm van een niet-triviaal geamalgameerd product volgt makkelijk dat de factoren oneindige index hebben. We krijgen dus een strijdigheid. Stel nu dat $F \cap G_1^* = 1$. Dan is ook $F \cap G_1 = 1$, en uit de tweede isomorfiestelling volgt dat

$$G_1 \cong G_1F/F \leq G/F$$

Opnieuw krijgen we een contradictie omdat G_1 oneindig is, en G/F is eindig. We besluiten dat $\text{rk}(F \cap G_1), \text{rk}(F \cap G_2) < \text{rk}(F)$. Merk op dat $F \cap G_1$ en $F \cap G_2$ vrije groepen zijn als deelgroepen van de vrije groep F (stelling 3.5.5). Uit de tweede isomorfiestelling volgt bovendien dat

$$\begin{aligned} G_1/(F \cap G_1) &\cong G_1 F/F \leq G/F \\ G_2/(F \cap G_2) &\cong G_2 F/F \leq G/F \end{aligned}$$

zodat G_1 en G_2 eindige extensies zijn van eindig voortgebrachte vrije groepen. Door opmerking 4.2.17 zijn G_1 en G_2 eindig voortgebracht. $\square$

We kunnen dus de inductiehypothese toepassen. Onderstel dat G_1 en G_2 isomorf zijn met fundamentele groepen corresponderend met de groepsgraaf-structuren

$$\Phi_1 : \begin{cases} v \mapsto G_v & (v \in V(\Gamma_1)) \\ e \mapsto \phi_e & (e \in E(\Gamma_1)) \end{cases} \quad \Phi_2 : \begin{cases} w \mapsto G_w & (w \in V(\Gamma_2)) \\ r \mapsto \phi_r & (r \in E(\Gamma_2)) \end{cases}$$

waarbij de groepen G_v en G_w eindig zijn. Zij $\theta_1 : G_1 \rightarrow *_{\Phi_1}^{T_1} G_v$ en $\theta_2 : G_2 \rightarrow *_{\Phi_2}^{T_2} G_w$ isomorfismen. Omdat A een eindige deelgroep is van G_1 , is $\theta_1(A)$ een eindige deelgroep van $*_{\Phi_1}^{T_1} G_v$. Door stelling 3.5.2 bestaat er een toegevoegde van $\theta_1(A)$, stel $x^{-1}\theta_1(A)x$, die bevat is in een zekere groep G_v . Analooog bestaat $y \in *_{\Phi_2}^{T_2} G_w$ zodat $y^{-1}\theta_2(B)y \in G_w$ voor een zekere $w \in V(\Gamma_2)$. Noteer nu $A_x := x^{-1}\theta_1(A)x$ en $B_y := y^{-1}\theta_2(B)y$, en definieer een morfisme

$$\psi : A_x \rightarrow B_y : x^{-1}\theta_1(a)x \mapsto y^{-1}\theta_2(\phi(a))y$$

Met andere woorden, ψ is gedefinieerd door het middenste deel van het volgende commutatieve diagram.

$$\begin{array}{ccccccc} G_1 & \longleftarrow & A & \xrightarrow{\phi} & B & \longleftarrow & G_2 \\ \downarrow \iota_x \circ \theta_1 & & \downarrow \iota_x \circ \theta_1 & & \downarrow \iota_y \circ \theta_2 & & \downarrow \iota_y \circ \theta_2 \\ *_{\Phi_1}^{T_1} G_v & \longleftrightarrow & G_v & \longleftrightarrow & A_x & \xrightarrow{\psi} & B_y & \longleftrightarrow & G_w & \longleftrightarrow & *_{\Phi_2}^{T_2} G_w \end{array}$$

Hierbij staan ι_x en ι_y voor de toevoeging met respectievelijk x en y . Definieer nu een nieuwe graaf Γ die bestaat uit Γ_1 en Γ_2 , samen met een boog s die de toppen v en w verbindt. Definieer de maximale deelboom T van Γ als de unie van T_1 en T_2 samen met de boog s . Zij nu Φ de groepsgraaf-structuur op Γ die de groepsgraaf-structuren Φ_1 en Φ_2 uitbreidt, en die s afbeeldt op ψ . We tonen aan dat $G \cong *_{\Phi}^T G_v$, waaruit lemma 4.3.2 volgt. Zij $\Delta = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$. Dan bestaat de contractie Γ/Δ uit een boog $\tilde{s}$ die de twee toppen $\tilde{v}$ en $\tilde{w}$ verbindt. Zij $\tilde{\Phi}$ de groepsgraaf-structuur op Γ/Δ zoals gedefinieerd in lemma 3.3.4. Dan wordt $\tilde{s}$ op $\tilde{\psi}$ afgebeeldt, waarbij $\tilde{\psi}$ gedefinieerd is door het commutatieve diagram (zie de opgave van lemma 3.2.6)

$$\begin{array}{ccccccc} *_{\Phi_1}^{T_1} G_v & \longleftrightarrow & G_v & \longleftrightarrow & A_x & \xrightarrow{\psi} & B_y & \longleftrightarrow & G_w & \longleftrightarrow & *_{\Phi_2}^{T_2} G_w \\ \uparrow \text{id} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \text{id} \\ *_{\Phi_1}^{T_1} G_v & \longleftrightarrow & A_x & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & B_y & \longleftrightarrow & *_{\Phi_2}^{T_2} G_w \end{array}$$

Door lemma 3.3.4 volstaat het aan te tonen dat $G \cong *_{\tilde{\Phi}}^{T_{\Gamma/\Delta}} G_{\tilde{v}}$. Nu is $*_{\tilde{\Phi}}^{T_{\Gamma/\Delta}} G_{\tilde{v}}$ niets anders dan het geamalgameerd product $(*_{\Phi_1}^{T_1} G_v) *_{\tilde{\psi}} (*_{\Phi_2}^{T_2} G_w)$. Door stelling 2.1.5 moeten we dus nagaan dat het volgende diagram commuteert.

$$\begin{array}{ccccccc} G_1 & \longleftrightarrow & A & \xrightarrow{\phi} & B & \longleftrightarrow & G_2 \\ \downarrow \iota_x \circ \theta_1 & & \downarrow \iota_x \circ \theta_1 & & \downarrow \iota_y \circ \theta_2 & & \downarrow \iota_y \circ \theta_2 \\ *_{\Phi_1}^{T_1} G_v & \longleftrightarrow & A_x & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & B_y & \longleftrightarrow & *_{\Phi_2}^{T_2} G_w \end{array}$$

Maar dit volgt door de voorgaande commutatieve diagrammen samen te voegen. Hiermee is de implicatie van links naar rechts in stelling 4.3.1 aangetoond.

Onderstel omgekeerd dat G isomorf is met een fundamentele groep $*_{\Phi}^T G_v$ waarvan de groepen corresponderend met de toppen van Γ eindig zijn. Uit lemma 3.3.2 weten we dat $*_{\Phi}^T G_v$ kan bekomen worden door een eindig aantal keer opeenvolgende geamalgameerde producten en HNN-extensies te nemen. Hierdoor volstaat het om de onderstaande twee lemma's te bewijzen. We tonen enkel lemma 4.3.6 aan. Het bewijs van lemma 4.3.5 is volledig analoog en wordt bovendien gegeven in [7, Stelling 1.3].

Lemma 4.3.5. *Zij G_1, G_2 twee groepen met eindige deelgroepen $A \leq G_1$ en $B \leq G_2$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als G_1 en G_2 eindige voortgebrachte, eindige extensies van vrije groepen zijn, dan geldt dit ook voor $G_1 *_{\phi} G_2$.*

Lemma 4.3.6. *Zij G_1 een groep met eindige deelgroepen $A \leq G_1$ en $B \leq G_1$, en $\phi : A \rightarrow B$ een isomorfisme. Als G_1 een eindig voortgebrachte, eindige extensie van een vrije groep is, dan geldt dit ook voor $G_1 *_{\phi}$.*

Bewijs. Het feit dat $G_1 *_{\phi}$ eindig voortgebracht is volgt onmiddellijk uit de definitie van de HNN-extensie. Onderstel dat $F \trianglelefteq G_1$ een vrije groep is waarvoor G_1/F eindig is. Zij $\pi : G_1 \rightarrow G_1/F$ het canonieke morfisme. Definieer nu een morfisme $\phi' : \pi(A) \rightarrow \pi(B) : aF \mapsto \phi(a)F$. Dan is ϕ' goed gedefinieerd en injectief omdat A en B eindig zijn, en F is een vrije groep. Het is duidelijk dat ϕ' ook surjectief is. Omdat $\pi(G_1)$ eindig is weten we uit stelling 2.2.17 dat er een morfisme

$$\psi : \pi(G_1) *_{\phi'} \rightarrow S$$

bestaat dat injectief is op $\pi(G_1)$, en zodat S een eindige groep is. Anderzijds volgt uit lemma 2.2.2 dat $\pi' : G_1 \rightarrow \pi(G_1) \hookrightarrow \pi(G_1) *_{\phi'}$ uitbreidt tot een morfisme

$$\Psi : G_1 *_{\phi} \rightarrow \pi(G_1) *_{\phi'}$$

dat de stabiele generator van $G_1 *_{\phi}$ afbeeldt op deze van $\pi(G_1) *_{\phi'}$. Omdat A eindig is en F een vrije groep is, volgt dat Ψ injectief is op $A \leq G_1 *_{\phi}$. Maar ook ψ is injectief op $\pi(G_1)$, zodat $\psi \circ \Psi$ injectief is op A . Stellen we $N := \ker(\psi \circ \Psi)$, dan betekent dit dat $N \cap A = \{1\}$. Omdat $N \trianglelefteq G_1 *_{\phi}$ volgt dat N triviale intersectie heeft met elke toegevoegde van A in $G_1 *_{\phi}$. We kunnen dus gevolg 4.1.19 toepassen, zodat

$$N \cong S * \left(*_{x} N \cap x^{-1} G_1 x \right)$$

waarbij S een vrije groep is. Het volstaat nu aan te tonen dat iedere factor $N \cap x^{-1} G_1 x$ een vrije groep is. Dan is immers N een vrije groep, en uit de eerste isomorfiestelling is $(G_1 *_{\phi})/N$ isomorf met een deelgroep van S , dus eindig. Omdat $N \trianglelefteq G_1$ volstaat het aan te tonen dat $x(N \cap x^{-1} G_1 x)x^{-1} = N \cap G_1$ een vrije groep is. Maar dit volgt omdat $N \cap G_1$ overeenkomt met $\ker(\pi) = F$ gezien als deelgroep van $G_1 *_{\phi}$. $\square$

Hoofdstuk V

Algemeen besluit

In dit hoofdstuk geven we een korte samenvatting van de resultaten die werden aangetoond. Daarnaast bespreken we nog enkele bijkomende vragen die buiten beschouwing bleven omwille van tijdsgebrek, of omdat ze niet van essentieel belang waren, maar die toch het vermelden waard zijn.

In hoofdstuk 2 toonden we aan dat het geamalgameerd product en de HNN-extensie over een normaalvorm beschikken, waaruit we verschillende eigenschappen konden afleiden. Dit hoofdstuk bevat geen belangrijke beperkingen en vormt een goede basis waarop de theorie verder gebouwd kan worden.

In hoofdstuk 3 introduceerden we boomproducten en zagen we dat dit overeenkomt met een geïtereerd geamalgameerd product. We breidden dit concept vervolgens uit naar fundamentele groepen, waarbij ook HNN-extensies worden geïtereerd. Een belangrijke beperking in dit hoofdstuk is het feit dat we de graaf Γ telkens eindig hadden verondersteld. Eventueel verder onderzoek zou erin bestaan om de resultaten van sectie 3.3 uit te breiden naar gevallen waarin de graaf Γ oneindig is (aftelbaar of onaftelbaar). De volgende stelling geeft een idee hoe bepaalde eigenschappen van veralgemeende fundamentele groepen kunnen bewezen worden indien Γ aftelbaar oneindig is. De schets van het bewijs is geïnspireerd door een argument uit [20].

Stelling 5.0.1. *Zij $*_{\Phi}^T G_v$ een veralgemeende fundamentele groep waarbij Γ een aftelbaar oneindige graaf is. Dan is elke G_v een deelgroep van $*_{\Phi}^T G_v$.*

Idee van het bewijs. Beschouw een stijgende keten $\{\Gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ van eindige deelgrafen van Γ zodat $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n = \Gamma$. De fundamentele groepen corresponderend met de deelgrafen Γ_n vormen dan een stijgende keten van deelgroepen van $G = *_{\Phi}^T G_v$. Zij H de groep die de unie is van deze keten. Door lemma 3.3.5 bestaat een canonisch morfisme $G \rightarrow H$. Maar uiteraard bestaat ook een canonisch morfisme $H \rightarrow G$, zodat $G \cong H$. Dus G kan gezien worden als de unie van een keten van fundamentele deelgroepen ervan, waaruit het gestelde volgt. $\square$

Wanneer Γ onaftelbaar oneindig is werkt dit simpel argument niet meer. Zelfs als we aantonen dat er een keten van deelgrafen bestaat waarvan de unie gelijk is aan Γ , kunnen we niet garanderen dat alle deelgrafen in die keten eindig zijn. Men zou een poging kunnen maken om dit op te lossen door gebruik te maken van transfinitie inductie of het Lemma van Zorn.

Het voorgaande bewijs brengt ons bovendien op een andere vraag: waarom werken we niet met een willekeurige bedekking van de graaf Γ in plaats van een keten van deelgrafen? In het geval dat we een bedekking gebruiken is het handig om te weten wat de doorsnede is van twee fundamentele deelgroepen binnen de volledige fundamentele groep. Aan het einde van sectie 2.3 hadden we opgemerkt dat de fundamentele groepen corresponderend met deelgrafen van Γ een hiërarchie vormen. In feite is het voorgaande een belangrijke eigenschap van deze hiërarchie die nog ontbreekt. We vermoeden dat het volgende geldt.

Vermoeden 5.0.2. *Zij Γ_1 en Γ_2 deelgrafen van Γ met niet-triviale intersectie Δ . Zij G_1 , G_2 en H de canonische fundamentele deelgroepen van $G = \ast_{\Phi}^T G_v$ horende bij respectievelijk Γ_1 , Γ_2 en Δ . Dan is de intersectie van G_1 en G_2 binnen G gelijk aan H .*

We geven een idee hoe men dit zou kunnen bewijzen indien Γ een boom is, zodat alle canonische deelgroepen van G boomproducten zijn. Het is duidelijk dat $H \leq G_1 \cap G_2$. De omgekeerde inclusie is echter niet triviaal. We mogen onderstellen dat $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, anders vervangen we G door de fundamentele groep corresponderend met $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Gamma$. Het vermoeden in 5.0.2 volgt dan voor boomproducten indien we de volgende sterkere eigenschap kunnen aantonen:

Stelling 5.0.3. *G is het geamalgameerd product van G_1 en G_2 , waarbij de deelgroep H van beide boomproducten geïdentificeerd wordt.*

Idee van het bewijs. Men kan dit bewijzen met een inductief argument. Als $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$, dan is $G_1 *_H G_2$ een triviaal geamalgameerd product, waaruit het gestelde volgt. Stel dus dat er een boog van Γ_1 bestaat die niet bevat is in Γ_2 . Zij G' en G'_1 de fundamentele groepen corresponderend met de grafen die bekomen worden uit respectievelijk Γ en Γ_1 door deze boog te verwijderen. Door lemma 3.2.4 is G het geamalgameerd product van G' met G_v , waarbij $v \in \Gamma$ de verwijderde top is. Door de inductiehypothese is

$$G = G_v *_\phi G' = G_v *_\phi (G'_1 *_H G_2)$$

Nu maakt het niet uit in welke volgorde we geamalgameerde producten nemen (3.2.4), zodat

$$G = G_v *_\phi (G'_1 *_H G_2) = (G_v *_\phi G'_1) *_H G_2 = G_1 *_H G_2$$

□

Indien de resultaten van sectie 3.3 uitgebreid zouden worden naar gevallen waar Γ on-eindig is, dan is het makkelijk om ook deze van sectie 3.4 uit te breiden. Stelling 3.4.1 zou dan zeggen dat elke veralgemeende fundamentele groep een actie op een boom uitoefent. Bovendien zou de veralgemening van stelling 3.4.2 impliceren dat elke actie van een groep G op een boom Y zonder inversie, met samenhangend quotiënt Y/G , isomorf is met de actie van een zekere veralgemeende fundamentele groep. De uitbreidingen van stellingen 3.4.1 en 3.4.2 bieden dan een manier om de volgende resultaten te bewijzen:

- De Grushko-Neumann-stelling (zie [5, Stelling 10.6])
- Gevolg 4.1.17 (zie [20, Stelling 14])

Het zou interessant zijn om te onderzoeken of de strategie in het bewijs van [20, Stelling 14] ook kan worden gebruikt om het analogon van gevolg 4.1.17 voor HNN-extensies te bewijzen, namelijk gevolg 4.1.19.

In het begin van hoofdstuk 4 definieerden we het concept van bipolaire structuren, en in stelling 4.1.9 zagen we dat elke bipolaire structuur overeenkomt met deze gegeven in één van de voorbeelden 4.1.2 en 4.1.3.

In stellingen 4.1.16 en 4.1.18 werden de deelgroepen van geamalgameerde producten en HNN-extensies geclassificeerd. We vermelden er nog bij dat de deelgroepen van willekeurige boomproducten verder onderzocht werden in [6]. Naar mijn weten is er nog geen algemene classificatie gemaakt van de deelgroepen van een willekeurige fundamentele groep. Dit vormt een uitdagende onderzoeksvraag.

Verder definieerden we de uiteinden van groepen, en in stelling 4.2.23 gaven we een karakterisatie van groepen met twee uiteinden.

Zoals eerder al vermeld kan stelling 4.1.9 uitgebreid worden naar het geval van bipolaire structuren in de zin van [22]. Deze uitbreiding zou toelaten om aan dit werk het bewijs toe te voegen van de karakterisatie van groepen met oneindig veel uiteinden (4.2.25).

Tenslotte toonden we in stelling 4.3.1 aan dat een eindig voortgebrachte groep G een vrije extensie is van een vrije groep, als en slechts als ze isomorf is met een fundamentele groep $*_{\Phi}^T G_v$ waarbij de groepen G_v eindig zijn.

Bibliografie

- [1] O. V. Bogopol'skij. *Introduction to group theory*, volume 6. European Mathematical Society, 2008.
- [2] J. L. Britton. The word problem. *Annals of Mathematics*, 77(1):16–32, 1963.
- [3] N. Cardin. The ends of finitely generated groups. Master's dissertation, University of Oxford, 2003.
- [4] M. Culler and K. Vogtmann. Moduli of graphs and automorphisms of free groups. *Inventiones mathematicae*, 84(1):91–119, 1986.
- [5] W. Dicks and M. J. Dunwoody. *Groups acting on graphs*, volume 17. Cambridge University Press, 1989.
- [6] J. Fischer. The subgroups of a tree product of groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 210:27–50, 1975.
- [7] R. Gregorac. On generalized free products of finite extensions of free groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):662–666, 1966.
- [8] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2005.
- [9] T. Jech and T. Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*, volume 3. Springer, 2006.
- [10] D. L. Johnson. *Presentations of Groups*, volume 15 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, 1997.
- [11] A. Karrass, A. Pietrowski, and D. Solitar. Finite and infinite cyclic extensions of free groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 16(4):458–466, 1973.
- [12] A. Karrass and D. Solitar. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup. *Transactions of the American Mathematical Society*, 150(1):227–255, 1970.
- [13] A. Karrass and D. Solitar. Subgroups of hnn groups and groups with one defining relation. *Canadian Journal of Mathematics*, 23(4):627–643, 1971.
- [14] R. Lyndon. *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag Berlin, 1977.
- [15] J. Meier. *Groups, Graphs and Trees: An Introduction to the Geometry of Infinite Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [16] B. H. Neumann. An essay on free products of groups with amalgamations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 246(919):503–554, 1954.

- [17] H. Neumann. Generalized free products with amalgamated subgroups. *American Journal of Mathematics*, 70(3):590–625, 1948.
- [18] H. Neumann. Generalized free products with amalgamated subgroups. *American Journal of Mathematics*, 71(3):491–540, 1949.
- [19] J. J. Rotman. *Advanced modern algebra*, volume 114. American Mathematical Soc., 2010.
- [20] J.-P. Serre. *Trees*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [21] J. R. Shoenfield. *Mathematical logic*. AK Peters/CRC Press, 2018.
- [22] J. Stallings. *Group Theory and Three-Dimensional Manifolds*, volume 4 of *Yale Mathematical Monographs*. Yale University Press, 1971.
- [23] K. Vogtmann. On the geometry of outer space. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52(1):27–46, 2015.
- [24] K. Vogtmann. The topology and geometry of automorphism groups of free groups. *arXiv preprint arXiv:1610.08545*, 2016.
- [25] S. Wang and B. Zimmermann. The maximum order of finite groups of outer automorphisms of free groups. *Mathematische Zeitschrift*, 216:83–87, 1994.
- [26] B. Zimmermann. Über homöomorphismen n-dimensionaler henkelkörper und endliche erweiterungen von schottky-gruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 56:474–486, 1981.